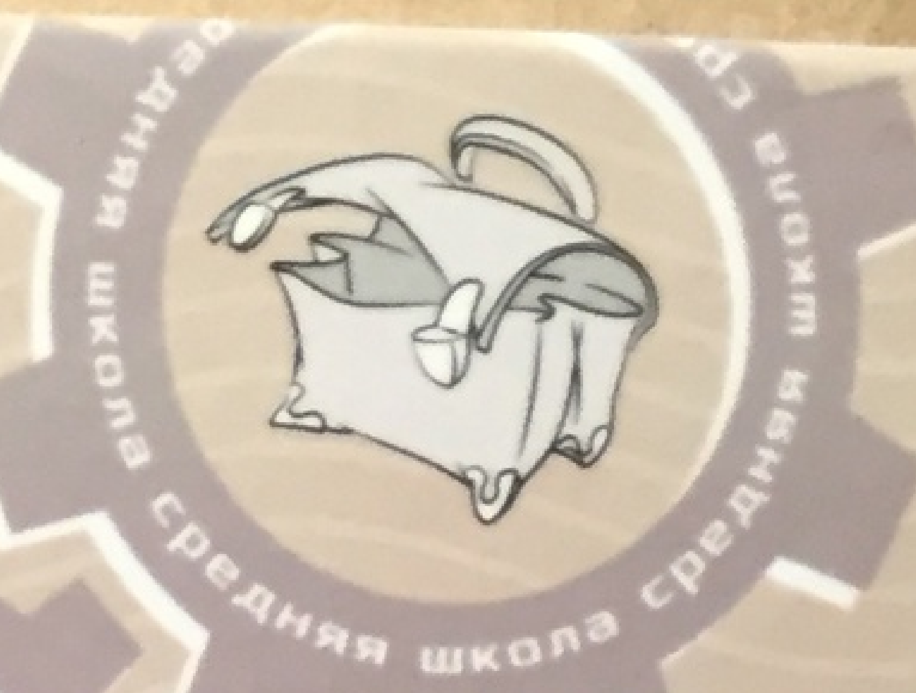
книга-репетитор

средняя школа средняя школа средняя школа средняя школа средняя школа средняя



Ж. Н. Михайлова

Алгоритмы — ключ к решению задач

Математика

5–6 классы

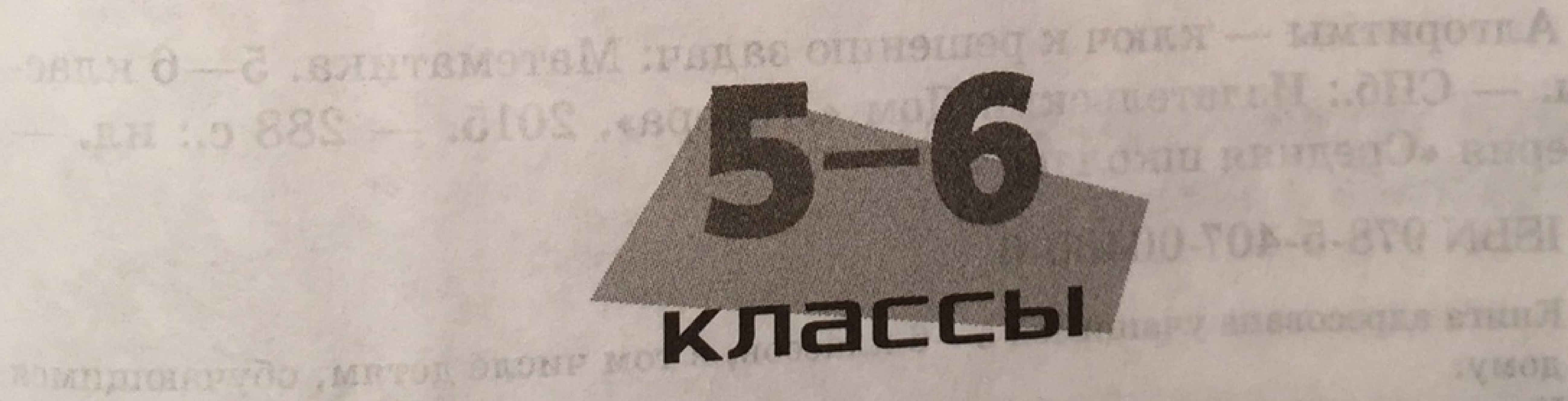
средняя школа средняя школа средняя школа средняя школа средняя

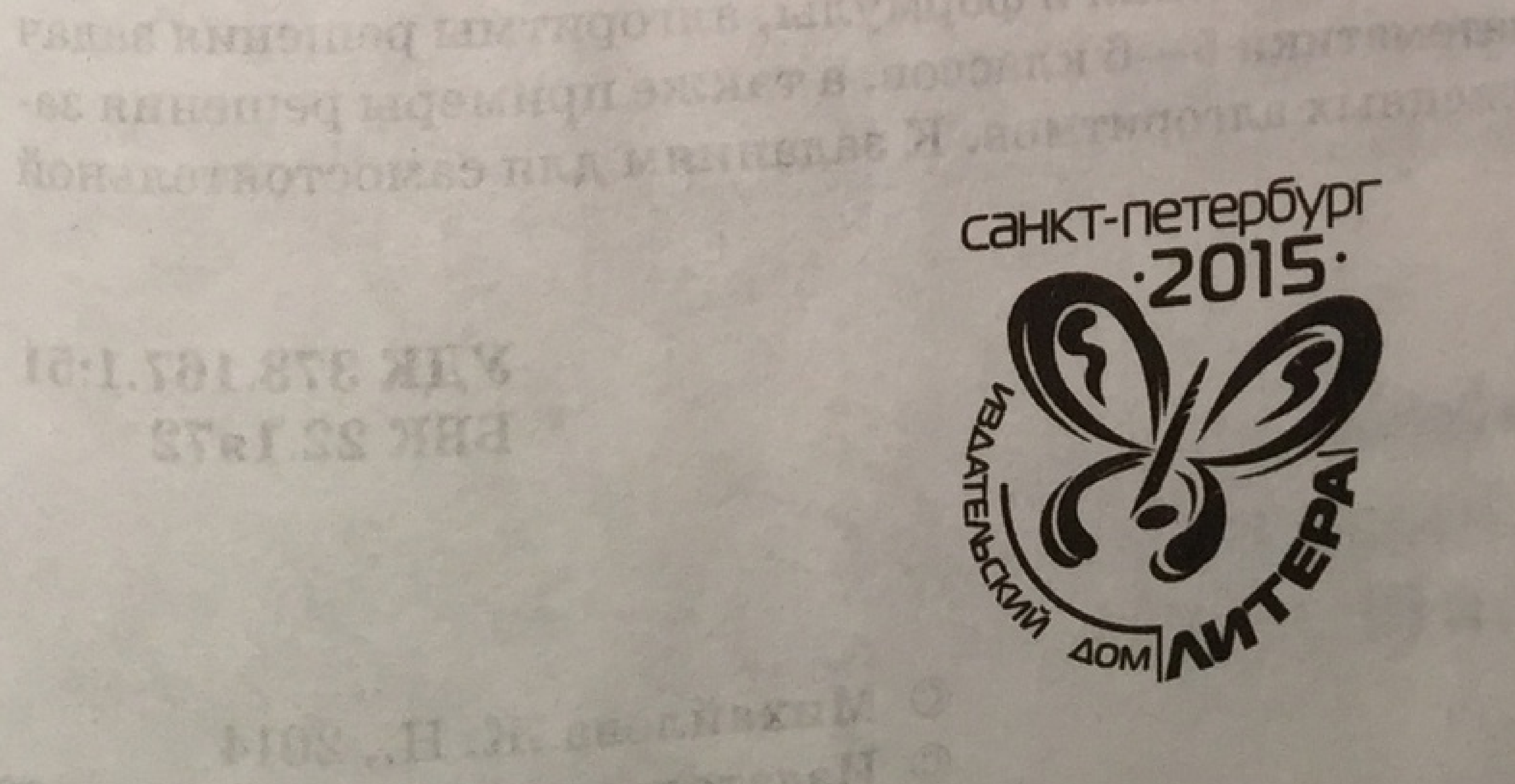
книга-репетитор

Ж. Н. Михайлова

Алгоритмы — ключ к решению задач

Математика





УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72
М69

Рецензенты:
Т. В. Введенская — заслуженный учитель РФ
А. С. Фадеева — учитель математики школы № 332
Санкт-Петербурга

Автор выражает благодарность
М. В. Ефименко и *Г. П. Голиной*
за помощь в компьютерном наборе рукописи

Михайлова Ж. Н.

М69 Алгоритмы — ключ к решению задач: Математика. 5—6 классы. — СПб.: Издательский Дом «Литера», 2015. — 288 с.: ил. — (Серия «Средняя школа»).

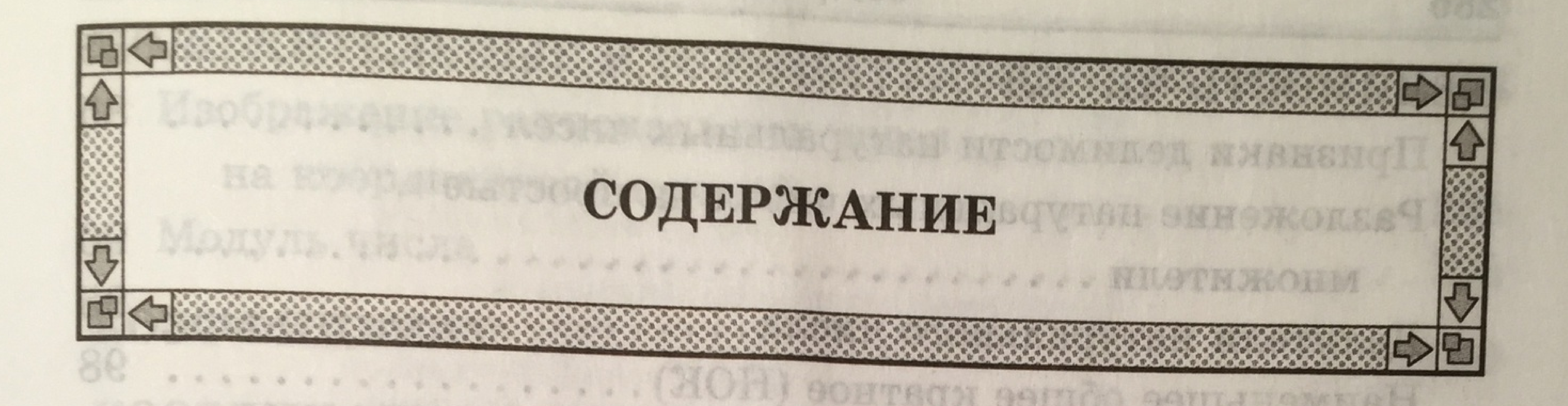
ISBN 978-5-407-00480-6

Книга адресована учащимся 5—6 классов, в том числе детям, обучающимся на дому.

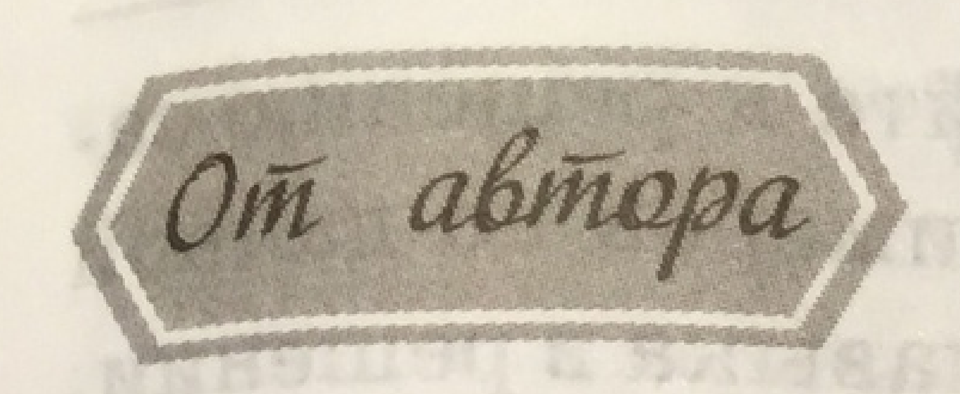
Книга содержит основные определения и формулы, алгоритмы решения задач и упражнений по курсу математики 5—6 классов, а также примеры решения заданий с помощью предложенных алгоритмов. К заданиям для самостоятельной работы даны ответы.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72

ISBN 978-5-407-00480-6



СОДЕРЖАНИЕ



Дорогие друзья!

Эта книга написана для вас, а также ваших родителей и учителей, которые помогут вам научиться применять алгоритмы решений типовых задач и примеров.

Алгоритмы — это правила последовательных шагов решения до получения ответа. Алгоритмы необходимы в любой деятельности человека и особенно при работе на компьютере, они развивают логику мышления, формируют навыки самостоятельной работы. Алгоритмы не надо заучивать, достаточно найти их в книге и применить. Постепенно вы сами научитесь составлять алгоритмы решений, ведь решать примеры надо по правилам, а не по решенному примеру.

Предлагаю вам несколько советов, как научиться применять алгоритмы решений:

1. Прочитайте здание по школьному учебнику и, если возникнут вопросы по его выполнению, найдите в пособии теоретический материал по данной теме.

2. Найдите в пособии алгоритм решения нужного задания и разберите каждый его пункт на примере, приведенном в книге.

3. Решите задание «Проверь себя!» и, если возникнет затруднение в каком-либо пункте решения по алгоритму, вернитесь к непонятному шагу алгоритма (п. 2) и, разобрав его, продолжайте решение дальше.

4. Усвоив и закрепив алгоритм, приступайте к решению заданного примера. Решите еще несколько примеров по данной теме, используя алгоритм для приобретения навыка в решении. Решение по алгоритму поможет вам научиться логически мыслить и грамотно объяснять свое решение.

5. При записи решения полезно записывать формулы и законы действий (за чертой справа), что не только позволит их сознательно применять и быстро запоминать, но и приучит мотивировать свое решение, что очень важно.

Наличие алгоритмов по всем темам курса математики 5—6-го классов позволит вам не иметь пробелов в знаниях и повторить материал. Данная книга не привязана к конкретному учебнику.

Желаю вам научиться решать математические задачи с помощью алгоритмов!

С любовью к вам
Автор

Условные обозначения

$=$	знак равенства
$\approx$	знак приблизительного равенства
$>$	больше
$<$	меньше
$\geq$	больше или равно
$\leq$	меньше или равно
$\lvert a \rvert$	модуль числа a
$+$	знак сложения (плюс)
$-$	знак вычитания (минус)
$\cdot$	знак умножения
$:$	знак деления
$\frac{a}{b}$	дробь, отношение двух чисел
a^n	степень с натуральным показателем
НОД	наибольший общий делитель
НОК	наименьшее общее кратное
$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$	пропорция
1 %	один процент
$A(x; y)$	точка A с координатами x и y
Ox	ось абсцисс
Oy	ось ординат
s	расстояние (путь)
v	скорость
t	время
A	работа
p	производительность (работа за единицу времени)
V	объем

КРАТКИЙ СПРАВОЧНИК

Числа, изучаемые в 5—6-м классах

Натуральные числа: 1, 2, 3, 4, 5, ...
Целые числа: 0, ±1, ±2, ±3, ±4, ...
Обыкновенные дроби: $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{4}$, $\frac{8}{7}$, $-1\frac{2}{3}$, ...
Десятичные дроби: 0,1; –2,35; 1,(3); ...

Действия над числами

Сложение: $a + b = c$ → сумма
Умножение: $a \cdot b = c$ → произведение
Вычитание: $a - b = c$ → разность
Деление: $a : b = c$, $\frac{a}{b} = c$ → частное
Возведение в натуральную степень: $a^n = b$ → степень

Законы сложения и умножения

$a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$ (*переместительный закон*)
$a + (b + c) = (a + b) + c$, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (*сочетательный закон*)
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (*распределительный закон*)

Свойства вычитания

$(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c)$
$c - (a + b) = (c - a) - b = (c - b) - a$

Деление суммы и разности на число

$(a + b) : c = a : c + b : c$
$(a - b) : c = a : c - b : c$

Деление произведения на число

$(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b = a \cdot (b : c)$

Действия с 0 и 1

$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$	$a : 1 = a$
$a - 0 = a$	$a \cdot 0 = 0$	$a : a = 1$
$a - a = 0$	$0 \cdot b = 0$	$1 : a = \frac{1}{a}$
$0 - a = -a$	$0 \cdot 0 = 0$	$0 : a = 0$

Делить на нуль **нельзя!**

Обыкновенные дроби

Запись дроби: $\frac{a}{b}$ (a — числитель, b — знаменатель)

$\frac{a}{b} < 1$ $(a < b)$ — правильная дробь

$\frac{a}{b} \geq 1$ $(a \geq b)$ — неправильная дробь

Основное свойство дроби:

$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}$, $m \neq 0$ (*приведение дроби к новому знаменателю*)

$\frac{a}{b} = \frac{a : k}{b : k}$, $k \neq 0$, k — общий делитель (*сокращение дроби*)

Сложение и вычитание дробей

$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$

$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b}$

$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}$

$$\frac{a^{(m}}{b}+\frac{c^{(n}}{d}=\frac{a\cdot m+c\cdot n}{\text{НОК}\,(b;d)};\quad \frac{a^{(m}}{b}-\frac{c^{(n}}{d}=\frac{a\cdot m-c\cdot n}{\text{НОК}\,(b;d)},$$

где m и n — дополнительные множители

Умножение и деление дробей

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$ $\quad$ $\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b}$ $\quad$ $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$

$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$ $\quad$ $\frac{a}{b}:m=\frac{a}{b\cdot m}$ $\quad$ $a\cdot\frac{1}{a}=1$

Пропорция

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, или $a:b=c:d$, $a, b, c, d\neq 0$

$a\cdot d=b\cdot c$ (*основное свойство пропорции*)

Если $\frac{a}{x}\searrow\frac{c}{d}$, то $x=\frac{a\cdot d}{c}$

Если $\frac{a}{b}\nearrow\frac{c}{x}$, то $x=\frac{b\cdot c}{a}$

Проценты

$1\%=\frac{1}{100}$, $1\%=0{,}01$

$n\%=\frac{n}{100}=0{,}01n$

Нахождение процентов (части) от числа:
$b=A\cdot n\%=A\cdot 0{,}01n$

Нахождение числа по его процентам (части):
$A=B:n\%=B:0{,}01n$

Нахождение $n\%$ числа с помощью пропорции:

A — 100%
x — $n\%$

$x=\frac{A\cdot n\%}{100\%}$

Нахождение числа по его процентам с помощью пропорции:

$$x — 100\% \quad B — n\% \qquad x = \frac{B \cdot 100\%}{n\%}$$

Формулы пути

$$s = v \cdot t \qquad v = s : t \qquad t = s : v$$

(s — путь, v — скорость, t — время)

Формулы работы

$$A = p \cdot t \qquad p = A : t \qquad t = A : p$$

(A — работа, p — производительность труда, t — время)

Решение простейших уравнений

Если $a + x = b$, то $x = b - a$
Если $a - x = b$, то $x = a - b$
Если $x - a = b$, то $x = a + b$
Если $a \cdot x = b$, то $x = b : a$
Если $x : a = b$, то $x = a \cdot b$
Если $a : x = b$, то $x = a : b$

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ЧИСЛО НУЛЬ

Чтение и запись натуральных чисел

Числа, получаемые при счете предметов: один, два, три, четыре, пять, шесть и т. д. — называются *натуральными числами.*

Цифры — это десять знаков 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, с помощью которых записывают натуральные числа (аналогично в русском языке с помощью букв записывают слова).

Число *нуль* (его записывают с помощью цифры 0) не относится к натуральным числам.

Натуральным рядом чисел называется такой бесконечный ряд чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ..., в котором числа записаны в том порядке, в каком их называют при счете. 1 (*единица*) — первое число натурального ряда; последнее число назвать нельзя, так как ряд бесконечен, поэтому в конце ряда ставят многоточие (...). Каждое следующее число натурального ряда на единицу больше предыдущего.

Разрядом называют то место, на котором стоит цифра в записи натурального числа.

Первую, вторую, третью и т. д. цифры числа, если считать справа налево, называют единицами первого, второго, третьего, четвертого и т. д. разрядов, т. е. *разрядные единицы* — это единица (1), десяток (10), сотня (100), тысяча (1000) и т. д.

Например, в числе 5128 имеется 8 единиц первого, 2 единицы второго, 1 единица третьего и 5 единиц четвертого разрядов.

Значение каждой цифры зависит не только от начертания этой цифры, но и от ее места (позиции) в записи числа, поэтому нумерация натуральных чисел называется *поместной* или *позиционной* нумерацией чисел.

Например, в числе 30 375 цифра 3 (встречается в двух местах) обозначает 3 сотни (третий разряд справа) и 3 десятка тысяч (пятый разряд справа).

Цифра 0 в записи числа обозначает отсутствующий разряд в числе (он при чтении не называется).

Например, число 405 200 читается так: четыреста пять тысяч двести.

Привычная *десятичная* система счисления натуральных чисел называется *позиционной.* В этой системе десять единиц какого-либо разряда составляют одну единицу следующего разряда.

Например, 10 единиц составляют 1 десяток, 10 десятков — 1 сотню, 10 сотен — 1 тысячу и т. д.

Для того чтобы читать и записывать натуральные числа, каждые три последовательных разряда, начиная с разряда единиц, объединили в *классы.*

На практике достаточно знания нескольких классов. Запишем их с названиями (для удобства чтения) в таблицу.

Классы	**IV класс миллиардов**			**III класс миллионов**			**II класс тысяч**			**I класс единиц**		
Разряды	сотни миллиардов	десятки миллиардов	единицы миллиардов	сотни миллионов	десятки миллионов	единицы миллионов	сотни тысяч	десятки тысяч	единицы тысяч	сотни	десятки	единицы
	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

дые три последовательных разряда, начиная с разряда единиц, объединили в *классы*.

На практике достаточно знания нескольких классов. Запишем их с названиями (для удобства чтения) в таблицу.

Классы	**IV класс миллиардов**			**III класс миллионов**			**II класс тысяч**			**I класс единиц**		
Разряды	сотни миллиардов	десятки миллиардов	единицы миллиардов	сотни миллионов	десятки миллионов	единицы миллионов	сотни тысяч	десятки тысяч	единицы тысяч	сотни	десятки	единицы
	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

В каждом классе три разряда, которые имеют одни и те же названия (для каждого класса):

1-й разряд — разряд *единиц* данного класса
2-й разряд — разряд *десятков* данного класса
3-й разряд — разряд *сотен* данного класса

Назовем еще несколько классов натуральных чисел:

V класс — класс *триллионов*
($1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$)

VI класс — класс *квадриллионов*
($1\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{15}$)

VII класс — класс *квинтиллионов*
($1\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{18}$)

VIII класс — класс *секстиллионов*
($1\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{21}$)

IX класс — класс *септиллионов*
($1\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{24}$)

Замечание. Чтобы сократить запись числа с большим количеством нулей, числа записывают в виде степени числа 10.

Например, $1000 = 10^3$, читают так: десять в третьей степени (3 нуля). Аналогично число $10\,000 = 10^4$ (4 нуля),
число $1\,000\,000 = 10^6$ (6 нулей) и т. д.

Названия чисел при записи можно сокращать так: единица — ед.; десяток — дес.; сотня — сот.; тысяча — тыс.; миллион — млн; миллиард — млрд и т. д.

Например: 1 млн $= 10^6$, 1 млрд $= 10^9$

Замечание. Иногда под цифрами понимают числа.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 — цифры, которые обозначают однозначные числа, поэтому если говорят «сумма цифр числа», то имеют в виду сумму однозначных чисел, обозначенных данными цифрами.

Например, в числе 231 сумма цифр равна: $3 + 2 + 1 = 6$ (складывают однозначные числа).

Алгоритм 1 Чтение многозначных натуральных чисел

① Разбейте число на классы. Для этого в записи числа отделите точкой в направлении справа налево (←) по три цифры, и только в старшем классе (первом слева) может быть одна, две или три цифры.

Например, число 14078250401 можно записать так:

14.078.250.401

② Сосчитайте количество классов и посмотрите по схеме их названия.

Например, в числе 14.078.250.401 четыре класса: класс миллиардов, класс миллионов, класс тысяч, класс единиц.

③ Назовите количество единиц старшего класса и добавьте его название.

Например, в числе 14 078 250 401 это 14 миллиардов (IV класс).

④ Назовите количество единиц следующего справа от него класса и добавьте его название.

Например, в том же числе это 78 миллионов (III класс).

⑤ Назовите количество единиц следующего справа от него класса и добавьте его название.

Например, в том же числе это 250 тысяч (II класс).

⑥ Перейдите к первому классу и прочитайте количество единиц, не называя класса.

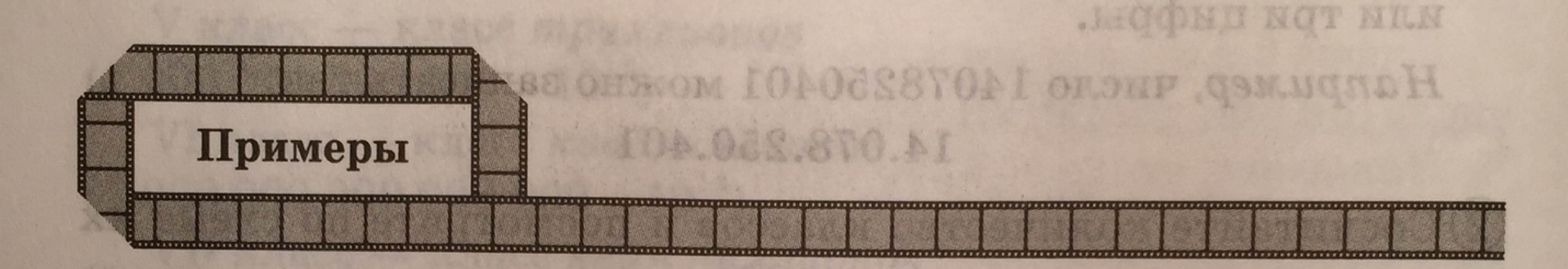
Например, в числе 14 078 250 401 это 401.

⑦ Прочитайте все число.

Например, 14 078 250 401 читается так: четырнадцать миллиардов семьдесят восемь миллионов двести пятьдесят тысяч четыреста один.

Внимание! Название класса единиц не произносите; разряд, в котором цифра 0, не называйте.

Замечание. При чтении многозначных натуральных чисел мы читаем только трехзначное, или двузначное, или однозначное число единиц данного класса и добавляем название класса.



1. Прочитайте число 4025009.

Решение.

1) Разбили число на классы: 4.025.009.

2) Получили 3 класса: класс миллионов (III), класс тысяч (II) и класс единиц (I).

3) III класс — 4 миллиона.

4) II класс — 25 тысяч (0 сотен тысяч не называется).

5) I класс — 9 (единиц).

Ответ: четыре миллиона двадцать пять тысяч девять.

2. Прочитайте число 750043000707.

Решение.

1) Разбили число на классы: 750.043.000.707.

2) Получили 4 класса: класс миллиардов (IV), класс миллионов (III), класс тысяч (II) и класс единиц (I).

3) IV класс — 750 миллиардов.

4) III класс — 43 миллиона.

5) II класс — 0 тысяч (тысячи не читайте).

6) I класс — 707.

Ответ: семьсот пятьдесят миллиардов сорок три миллиона семьсот семь.

Проверь себя!

Прочитайте число: а) 10540020; б) 87204536000.

Ответ: а) десять миллионов пятьсот сорок тысяч двадцать;
б) восемьдесят семь миллиардов двести четыре миллиона пятьсот тридцать шесть тысяч.

Алгоритм 2 Запись многозначных натуральных чисел

① Определите количество классов в числе и поставьте в каждом классе три точки.

Например, в числе 204 миллиарда 40 миллионов 789 тысяч 101 четыре класса, т. е. пишем ... ...

② Запишите в четвертый класс (миллиардов) вместо точек 204.

Например, 204 ... ...

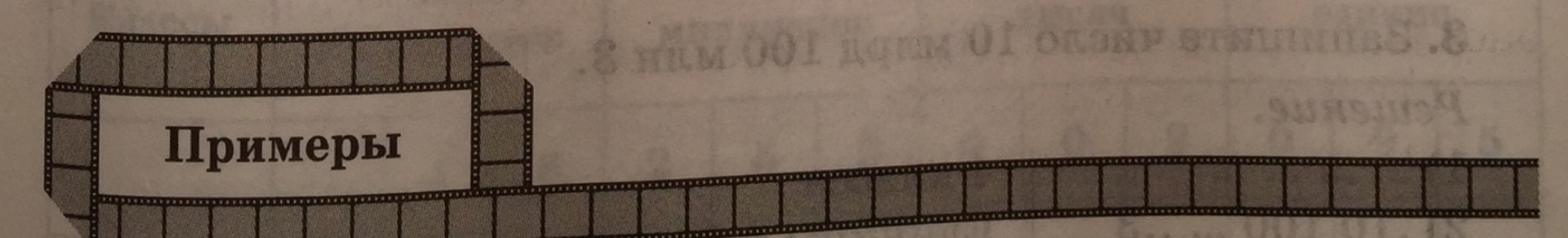
③ Запишите в третий класс (миллионов) 040 (причем вместо разряда сотен запишите 0).

Например, 204 040 ... ...

④ Запишите во второй класс (тысяч) 789.

Например, 204 040 789 ...

⑤ Запишите в первый класс 101.
Получите число 204 040 789 101.



1. Запишите число 1 триллион 12 миллионов 15 тысяч 80.

Решение.

Прежде чем записать, поясним решение по алгоритму.

1) Высший класс — триллионы, значит, в данном числе пять классов, т. е. запишем … … … … …

2) В пятый класс запишем одну единицу: ..1 … … … …

3) В четвертый класс (миллиардов) запишем три нуля (миллиардов в числе нет): 1 000 … … …

4) В третий класс (миллионов) запишем 012 (в числе 12 млн, сотен миллионов нет): 1 000 012 … …

5) Во второй класс (тысяч) запишем 015 (в числе 15 тысяч, сотен тысяч нет): 1 000 012 015 …

6) В первый класс (единиц) запишем 080 (сотен нет): 1 000 012 015 080 — получим нужное число.

Замечание. Пишем нули в разрядах, единицы которых отсутствуют (за исключением отсутствия единиц в старших разрядах слева от первой отличной от нуля цифры).

2. Запишите число 20 миллионов 4 тысячи 30.

Решение.

1) Всего в числе три класса (миллионы — третий класс): запишем … … …

2) В третий класс (миллионов) запишем 20: .20 … …

3) Во второй класс (тысяч) запишем 004: 20 004 …

4) В первый класс (единиц) запишем 030: 20 004 030 — получим нужное число.

Замечание. В разрядах 1, 3, 5, 6, 7 пишем нули. В разряде 9 нуль не пишем.

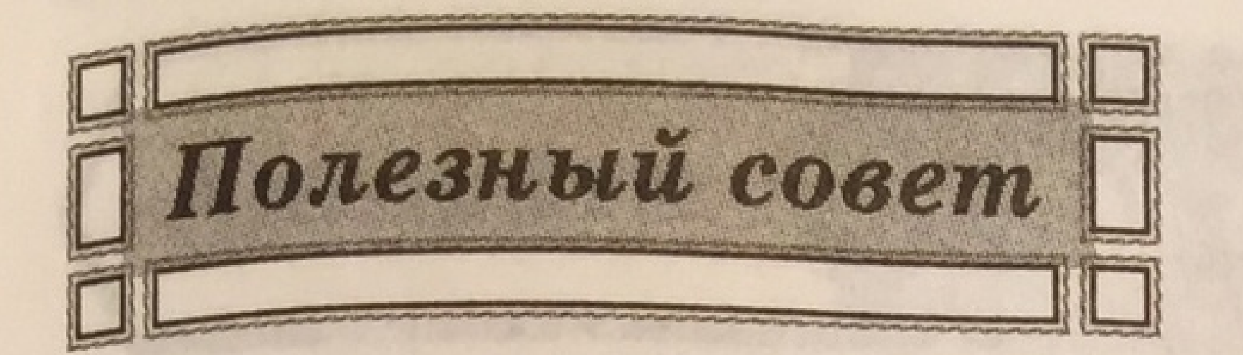
Ответ: 20 004 030.

3. Запишите число 10 млрд 100 млн 3.

Решение.

1) … … … …	4 класса
2) .10 100 … ..3	Единицы в разрядах 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10 отсутствуют, поэтому на их месте пишем нули. В разряде 12 нуль не пишем.
3) 10 100 000 003	

Ответ: 10 100 000 003.



Если в числе отсутствуют все разряды какого-либо класса, то на месте единиц этих разрядов пишем нули.

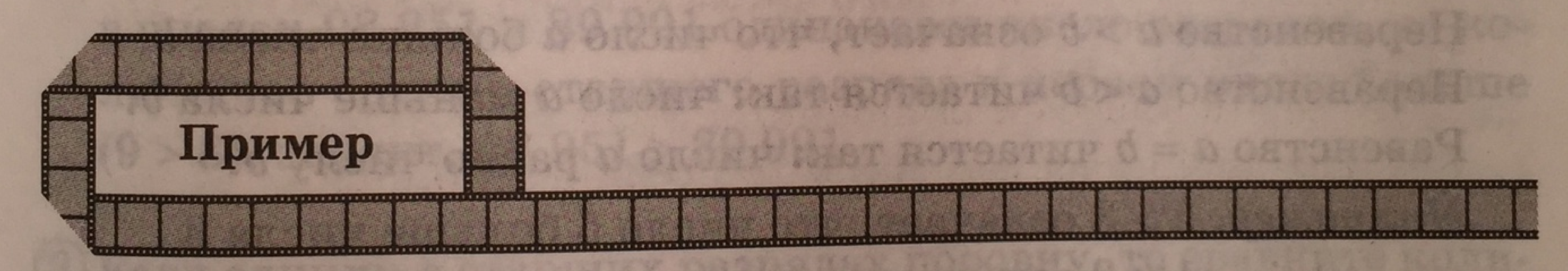
Старший класс начинают записывать с цифры, отличной от нуля.

При записи класс от класса отделяйте небольшим промежутком.

При затруднении в записывании больших чисел можно рисовать схему таблицы классов и разрядов и записывать в нее цифры поразрядно.

Чтобы узнать, сколько в числе заключается единиц данного разряда, надо отбросить цифры, означающие низшие разряды, и прочесть оставшееся число.

Например, в числе 52 438 содержится 524 сотни, 5243 десятка.



Запишите число восемнадцать миллиардов двести пятьдесят миллионов две тысячи девяносто пять (с помощью таблицы).

Классы	IV класс миллиардов			III класс миллионов			II класс тысяч			I класс единиц		
		1	8	2	5	0	0	0	2	0	9	5
Разряды	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Ответ: 18 250 002 095.

Проверь себя!

Запишите число: а) 15 миллионов 45 тысяч; б) 80 триллионов 201 миллиард 506 тысяч 3; в) 101 миллиард 10 миллионов 1 тысяча 100.

Ответ: а) 15 045 000; б) 80 201 000 506 003;
в) 101 010 001 100.

Сравнение натуральных чисел

Сравнить два натуральных числа — значит установить, какое из них больше (меньше) или равно другому.

Результат сравнения чисел a и b записывают в виде неравенства или равенства.

Неравенство $a > b$ означает, что число a больше числа b.

Неравенство $a < b$ читается так: число a меньше числа b.

Равенство $a = b$ читается так: число a равно числу b.

Например, $5 > 3$ означает, что число 5 больше числа 3
$1 < 2$ означает, что число 1 меньше числа 2

Из двух натуральных чисел меньше то, которое при счете называют раньше.

Например, $99 < 100$; $10 < 20$; $28 > 25$

Два натуральных числа сравниваются поразрядно, начиная с высшего разряда.

При сравнении трех натуральных чисел неравенства записывают иначе.

Например, при сравнении чисел 3, 5 и 7 записывают $3 < 5 < 7$ и читают (начиная со среднего числа) так: пять больше трех, но меньше семи.

Алгоритм 3 Сравнение двух натуральных чисел

① Сравните количество разрядов в числах. Из двух чисел больше то, в котором разрядов больше, и меньше то, в котором разрядов меньше.

Например:

при сравнении чисел 1025 или 990 замечаем, что число 1025 содержит 4 разряда, а число 990 содержит 3 разряда, значит, $1025 > 990$

② Если разрядов в числах поровну, то сравните количество единиц старших разрядов. Больше то число, в котором единиц старшего разряда больше, остальные разряды сравнивать не надо.

Например:

в числах 98 951 и 89 991 одинаковое число разрядов, но количество единиц старшего разряда в первом числе больше $(9 > 8)$, значит, $98\,951 > 89\,991$

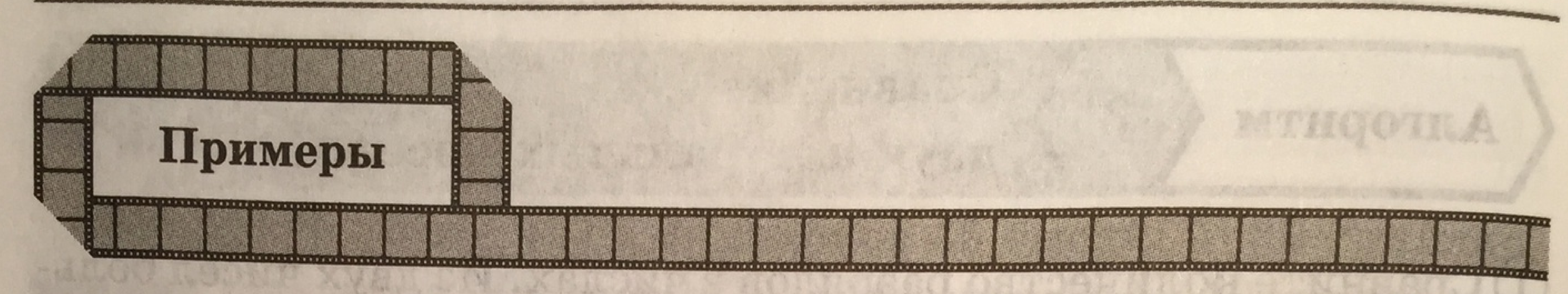
③ Если единиц в старших разрядах поровну, то сравните количество единиц в следующем разряде. Больше то число, у которого единиц в этом разряде больше. При равном количестве единиц перейдите к следующим разрядам и т. д.

Например:

в числах 978 и 981 количество разрядов равно; количество единиц в третьих разрядах поровну (9), но во втором разряде первого числа единиц меньше $(7 < 8)$, значит, $978 < 981$

Замечание

Удобно, решая конкретный пример с помощью алгоритма 3, записывать пояснение к решению справа (за чертой).



Примеры

1. Сравните числа 2305 и 986.

Решение.

$\underbrace{2305}_{4}$, $\underbrace{986}_{3}$ (4 > 3) разряда разряда	В первом числе больше разрядов

Ответ: 2305 > 986.

2. Какое из чисел: 6086 или 6121 — меньше?

Решение.

$\underbrace{6\underline{0}86}_{4}$, $\underbrace{6\underline{1}21}_{4}$ 6086 < 6121	Равное количество разрядов (4) Равное количество единиц четвертых разрядов (6), но в третьем разряде первого числа единиц меньше (0 < 1)

Ответ: 6086 < 6121.

3. Сравните числа 204 708 и 204 699.

Решение.

204 $\underline{7}$08 и 204 $\underline{6}$99 204 708 > 204 699	Разрядов поровну (6) Единиц в шестом, пятом и четвертом разрядах поровну, а в третьем разряде первого числа единиц больше (7 > 6)

Ответ: 204 708 > 204 699.

4. Запишите три значения *x*, при которых неравенство $x < 12$ верно, и два значения *x*, при которых неравенство $x < 12$ неверно.

Решение.

1) Каждое из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 меньше 12, поэтому выберем из этих чисел три любых числа и запишем, например, верные неравенства: 3 < 12, 5 < 12, 10 < 12.

2) Каждое из чисел 12, 13, 14, 15, ... больше или равно 12, поэтому неверными будут, например, неравенства $12 < 12$, $20 < 12$.

Проверь себя!

1. Сравните числа 50505050 и 51505000 и запишите ответ с помощью неравенства.

Ответ: 51 505 000 > 50 505 050.

2. Напишите два любых значения a, при которых неравенство $a > 5$ верное, и все значения a, при которых неравенство $a > 5$ неверное.

Ответ: при a, равном 6, 8, неравенство $a > 5$ верное, а при a, равном 0, 1, 2, 3, 4, 5, неравенство $a > 5$ неверное.

Округление натуральных чисел

При подсчете большого количества предметов или при измерении величин возникает потребность находить не точный результат, а приближенный; при этом натуральные числа приходится округлять, т. е. заменять нулями все его цифры, стоящие справа от указанного при округлении разряда.

Замена числа его приближенным значением называется *округлением числа*.

При округлении до десятков натуральное число заменяют приближенным числом с одним нулем в конце, при округлении до сотен — с двумя нулями в конце, до тысяч — с тремя нулями в конце и т. д.

Для записи результата округления используют знак приближенного равенства ≈.

Например, запись $218 \approx 220$ читают так: число 218 приближенно равно числу 220.

Округлить число до нужного разряда — значит найти его приближенное значение с точностью до этого разряда.

Алгоритм 4 Округление натуральных чисел

① В заданном числе подчеркните тот разряд, до которого надо округлять число; найдите первую цифру справа от этого разряда и обведите ее.

Например, при округлении до тысяч числа 24 873 запишем

2<u>4</u> [8]73

② Если обведена одна из цифр 0, 1, 2, 3, 4, то цифру в подчеркнутом разряде оставьте без изменения, а все цифры справа от нее (начиная с той, что обведена) замените нулями.

Например, округляя число 15 235 до тысяч, а число 2163 до десятков, получим 1<u>5</u> [2]35 ≈ 15 000; 21<u>6</u>[3] ≈ 2160.

③ Если обведена одна из цифр 5, 6, 7, 8, 9, то к единицам подчеркнутого разряда прибавьте одну единицу, а все цифры справа от нее замените нулями (начиная с обведенной).

Например, округляя число 24 873 до тысяч, получим

2<u>4</u> [8]73 ≈ 25 000

Примеры

1. Округлите число 56 287 до сотен.

Решение.

Применяя алгоритм, рассуждаем так: в числе 56 <u>2</u>[8]7 разряд сотен равен двум единицам, за разрядом сотен стоит цифра 8, значит, две единицы увеличим на единицу, а остальные цифры после полученной цифры 3 заменим нулями.

В тетради пишем:

56 287 ≈ 56 300	2 + 1 = 3 сотни, за цифрой 2 стоит цифра 8

Ответ: 56 287 ≈ 56 300.

2. Округлите число 738 496 до тысяч.

Решение.

Применяя алгоритм, рассуждаем так: в числе 738 496 разряд тысяч содержит 8 единиц, за ним стоит цифра 4, поэтому цифру 8 сохраним, а все цифры за ней заменим нулями.

Запишем:

738 496 ≈ 738 000	Цифру 8 сохраняем, за ней стоит цифра 4

Ответ: 738 496 ≈ 738 000.

3. Округлите число 4 517 514 до миллионов.

Решение.

Применяя алгоритм, рассуждаем так: в числе 4 517 514 в разряде миллионов стоит цифра 4, за ней стоит цифра 5, поэтому к 4 прибавим 1 и после полученной цифры 5 (справа от миллионов) все цифры заменим нулями.

В тетради пишем:

4 517 514 ≈ 5 000 000	4 + 1 = 5 миллионов, за цифрой 4 стоит цифра 5

Ответ: 4 517 514 ≈ 5 000 000.

4. Определите, до какого разряда округлены числа:

а) 79 036 ≈ 80 000; б) 79 036 ≈ 79 000; в) 79 036 ≈ 79 040

Решение.

а) Если 79 036 ≈ 80 000, то количество единиц пятого разряда увеличили на одну единицу, так как за цифрой 7 стоит цифра 9, т. е. округлили до пятого разряда.

б) Если 79 036 ≈ 79 000, то без изменения остались четвертый и третий разряды. Рассмотрим два случая:

1) если 79 036 ≈ 79 000, то округлили до четвертого разряда;

2) если 79 036 ≈ 79 000, то округлили до третьего разряда.

в) Если число 79 036 ≈ 79 040, то округлили до второго разряда.

Ответ: а) до пятого разряда;
б) до третьего или четвертого разряда;
в) до второго разряда.

Проверь себя!

1. Округлите число 21 705 до десятков тысяч, до тысяч, до десятков.

Ответ: 20 000; 22 000; 21 710.

2. Объясните, до какого разряда округлили числа:

83 059 ≈ 80 000; 83 059 ≈ 83 100

Ответ: до пятого разряда; до третьего разряда.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ НАД НАТУРАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

Сложение натуральных чисел

Если по двум данным числам определяется третье число по некоторым правилам, то этот процесс в математике называется *действием*.

Сложение, вычитание, умножение и деление называют *арифметическими действиями*.

$a + b = c$

слагаемое слагаемое сумма

Запись $a + b = c$ читают так: сумма двух чисел a и b равна числу c. Очевидно, $c > a$, $c > b$.

Арифметическое действие, при помощи которого находят число, содержащее столько единиц, сколько их в двух данных натуральных числах вместе, называется *сложением двух натуральных чисел*.

Сложение с нулем

$$a + 0 = 0 + a = a$$

$$0 + 0 = 0$$

Законы сложения

$a + b = b + a$ ***(переместительный)***

Например: $10 + 1090 = 1090 + 10 = 1100$

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c) \text{ (сочетательный)}$$

Например:

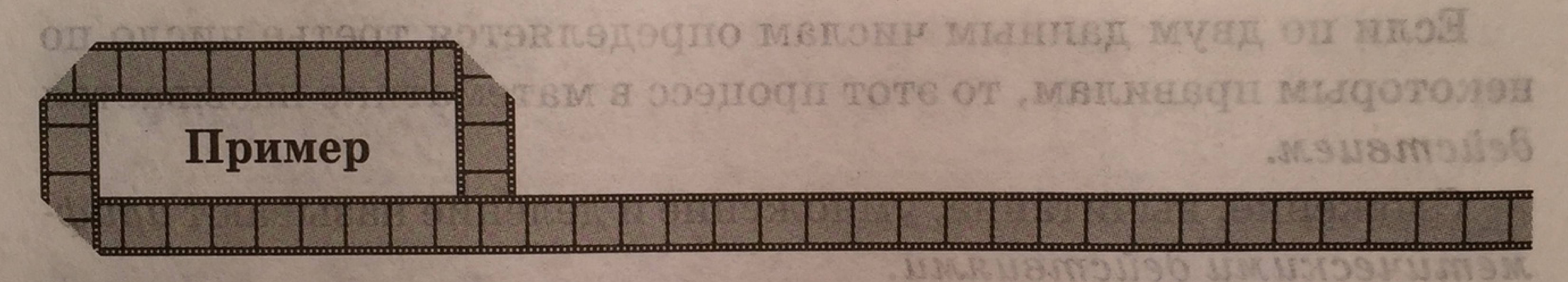
180 + 90 + 110 = (180 + 90) + 110 = 180 + (90 + 110) = 380

Удобнее считать таким образом:

180 + (90 + 110) = 180 + 200 = 380

Замечание

Сочетательный закон сложения справедлив для любого числа слагаемых. Законы сложения позволяют переставлять слагаемые местами и группировать их по два для более удобного и быстрого вычисления.



Вычислите, применяя законы сложения, сумму

1235 + 1280 + 199 + 720 + 1

Решение.

1235 + 1280 + 199 + 720 + 1 =
= 1235 + (1280 + 720) + (199 + 1) =
= 1235 + 2000 + 200 = 1235 + 2200 =
= 3435

$a + b + c = (a + b) + c =$
$= a + (b + c)$

$a + b = b + a$

Ответ: 3435.

Проверь себя!

Вычислите, применяя сочетательный закон сложения:

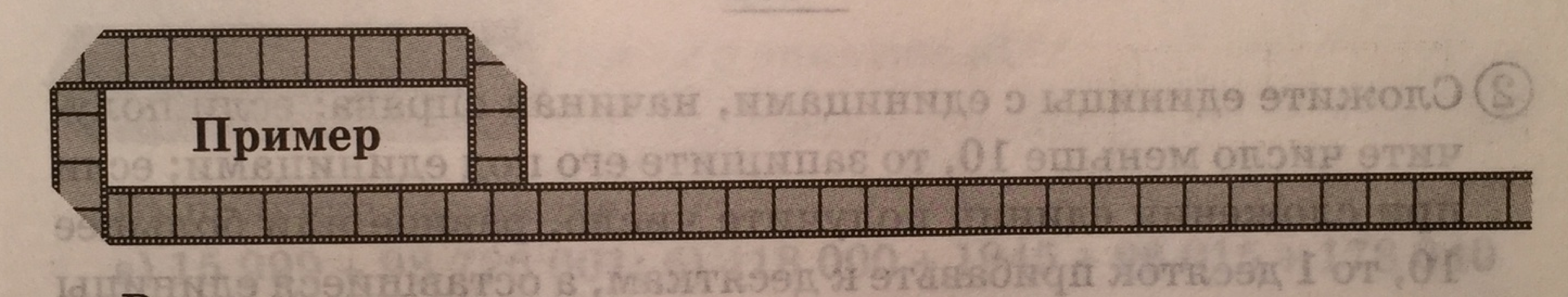
а) 19 999 + (4801 + 15 200)

б) 650 + 450 + 330

Ответ: а) 40 000; б) 1430.

Алгоритм 5. Нахождение суммы натуральных чисел с помощью прикидки ответа

1. Округлите числа до единиц старшего разряда или разряда, стоящего за ним.
2. Выполните действие сложения над приближенными числами (п. 1).
3. Выполните действие сложения над заданными числами.
4. Сравните количество разрядов в значении сумм п. 2 и 3; если количества разрядов в ответах различные, то пересчитайте результат.



Выполните сложение.

$$706\,051 + 3\,300\,011 = 4\,006\,062$$

Решение.

+ 3 300 011 706 051 4 006 062	706 051 ≈ 700 000 3 300 011 ≈ 3 000 000 3 000 000 + 700 000 = 3 700 000 ≈ 4 000 000

Количества цифр в ответах совпадают, и ответ близок к предполагаемому.

Ответ: 4 006 062.

Проверь себя!

Найдите сумму чисел a и b, при этом предварительно «прикиньте» ответ, если: $a = 26\,305\,281$, $b = 5\,495\,190$.

Ответ: 31 800 471.

Алгоритм 6 Сложение многозначных натуральных чисел

① Запишите числа в столбик так, чтобы цифры одинаковых разрядов были подписаны друг под другом, начиная справа.

Например, при нахождении суммы чисел 532 и 15 288 запишем первым слагаемым то число, у которого больше цифр (так удобнее считать):

$$a + b = b + a$$

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 15\,288 \\ 532 \end{array} \\ \hline \end{array}$$

② Сложите единицы с единицами, начиная справа; если получите число меньше 10, то запишите его под единицами; если при сложении единиц получите число, равное или большее 10, то 1 десяток прибавьте к десяткам, а оставшиеся единицы или нуль запишите под единицами.

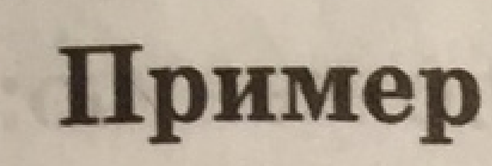
③ Сложите десятки с десятками и запишите полученное число под разрядом десятков; если получится еще 1 сотня, то прибавьте ее к сотням.

④ Сложите сотни с сотнями и повторите процесс сложения далее; если в первом слагаемом остались свободные разряды, то их цифры снесите в результат, записывая их разряд под разрядом.

Например:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 15\,288 \\ 532 \end{array} \\ \hline 15\,820 \end{array}$$

Замечание. Сложение натуральных чисел выполняется по разрядам: единицы складываются с единицами, десятки — с десятками, сотни — с сотнями и т. д.



Выполните сложение чисел: 5387 + 21 542 213.

Решение.

$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 21\,542\,213 \\ 5\,387 \end{array} \\ \hline 21\,547\,600 \end{array}$	$a + b = b + a$

Ответ: 21 547 600.

Проверь себя!

Выполните сложение:

а) 15 999 + 98 726 001; б) 418 000 + 1945 + 96 015 + 178 040

Ответ: а) 98 742 000; б) 694 000.

Вычитание натуральных чисел

Вычитанием называется действие, посредством которого по данной сумме двух слагаемых и одному из них находят другое слагаемое.

$$a - b = c$$

уменьшаемое, вычитаемое, разность

Число c называется *разностью* двух чисел a и b, если число c в сумме с вычитаемым b дает уменьшаемое a. Очевидно, что $a > b$ и $a > c$.

$$a - b = c, \text{ если } c + b = a$$

Действие вычитания есть действие, обратное сложению: если $a + x = b$, то $x = b - a$, причем $x < b$ и $a < b$.

Проверить результат вычитания можно сложением и вычитанием: если $a - b = c$, то: 1) $a = c + b$; 2) $b = a - c$.

Например, результат вычитания $100 - 15 = 85$ можно проверить так: $85 + 15 = 100$ или $100 - 85 = 15$.

Если число a меньше числа b ($a < b$), то найти натуральное число c, равное разности натуральных чисел a и b, **нельзя!**

Например, нельзя вычесть из числа 3 число 5.

Вычитание с нулем

$$a - 0 = a$$
$$a - a = 0$$
$$0 - 0 = 0$$

Свойства вычитания

$(a + b) - c = (a - c) + b$, если $c < a$ или $c = a$

$(a + b) - c = a + (b - c)$, если $c < b$ или $c = b$

$c - (a + b) = (c - a) - b = (c - b) - a$, если $a + b < c$ или $a + b = c$

Примеры

1. Найдите значения a и b, сравните их, если:
$a = (10\,367 + 43\,028) - 367$, $b = 10\,367 + (43\,028 - 367)$

Решение.

$a = (10\,367 + 43\,028) - 367 = (10\,367 - 367) + 43\,028 = 10\,000 + 43\,028 = 53\,028$	$(a + b) - c = (a - c) + b$

$b = 10\,367 + (43\,028 - 367) = 10\,367 + 42\,661 = 53\,028$

$$\begin{array}{r} -\,43\,028 \\ 367 \\ \hline 42\,661 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\,42\,661 \\ 10\,367 \\ \hline 53\,028 \end{array}$$

Ответ: значения a и b равны.

2. Вычислите: 4843 – (1143 + 3500).

Решение.

$4843 - (1143 + 3500) = (4843 - 1143) - 3500 = 3700 - 3500 = 200$

$c - (a + b) = (c - a) - b$

Ответ: 200.

Проверь себя!

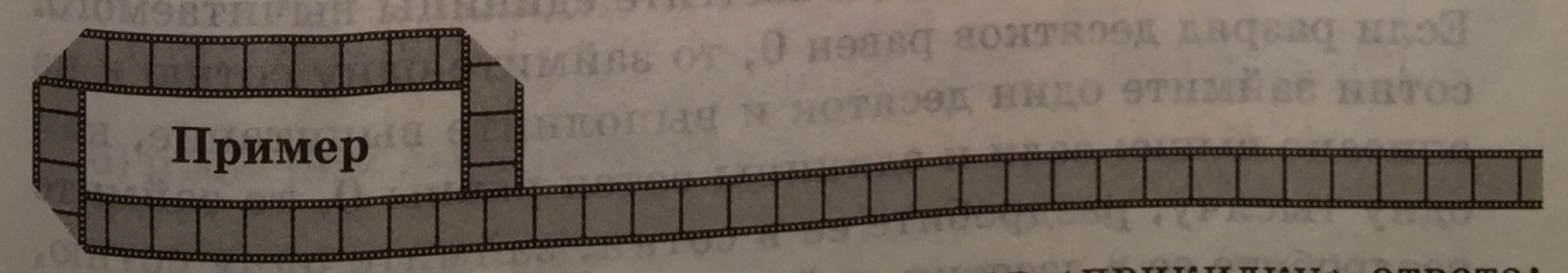
Вычислите, используя свойства вычитания:

а) (726845 + 15789) – 13845; б) 19013 – (7023 + 2013)

Ответ: а) 728 789; б) 9977.

Алгоритм 7. Нахождение предполагаемого ответа при вычитании натуральных чисел

1. Округлите числа до единиц старшего разряда или разряда, стоящего за ним.
2. Выполните действие над приближенными числами (п. 1).
3. Выполните действие над заданными числами.
4. Сравните количество разрядов у чисел в п. 2 и 3; если количество разрядов отличается, пересчитайте результат.



Выполните вычитание чисел, сделав «прикидку» ответа: 12927500 – 382300.

Решение.

$\begin{array}{r} -\,12\,927\,500 \\ 382\,300 \\ \hline 12\,545\,200 \end{array}$	$12\,\underline{2}\,\boxed{9}27\,500 \approx 13\,000\,000$ $\underline{3}\boxed{8}2\,300 \approx 400\,000$ $13\,000\,000 - 400\,000 = 12\,600\,000$

Ответ: 12 545 200.

Проверь себя!

«Прикиньте» разность, а затем выполните вычитание и округлите: а) до 4-го разряда; б) до 7-го разряда **(1—2)**.

1. 30 194 – 26 243

2. 100 100 100 – 456 654

Ответ: **1.** а) ≈ 4000; б) 3951.

2. а) ≈ 99 500 000; б) 99 643 446.

Алгоритм 8 Вычитание многозначных натуральных чисел

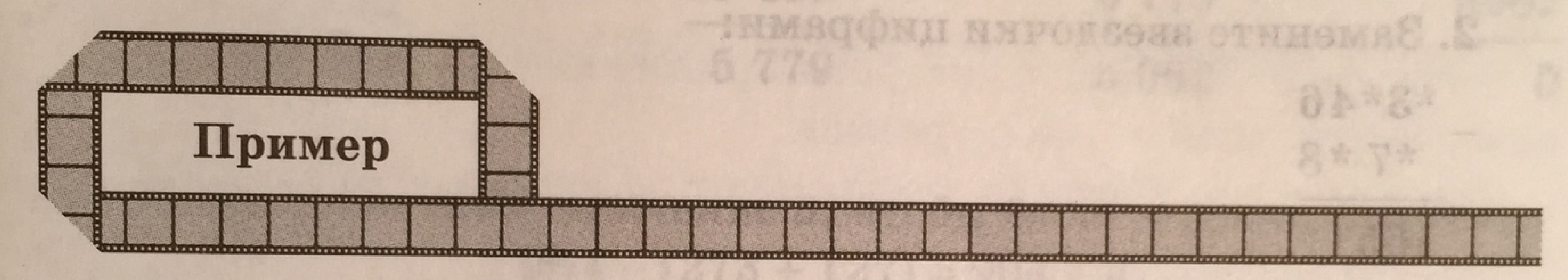
① Запишите многозначные числа в столбик так, чтобы цифры разрядов были подписаны друг под другом, начиная справа.

② Вычтите из единиц уменьшаемого единицы вычитаемого. Если количество единиц уменьшаемого меньше, чем количество единиц вычитаемого, то займите один десяток уменьшаемого и раздробите его в единицы. Прибавьте к единицам уменьшаемого 10 единиц и вычтите единицы вычитаемого. Если разряд десятков равен 0, то займите одну сотню и из сотни займите один десяток и выполните вычитание, как описано выше; если и единицы сотен равны 0, то займите одну тысячу, раздробите ее в сотни; займите одну сотню, раздробите ее в десятки, займите один десяток, выполните вычитание и т. д.

③ Вычтите из десятков уменьшаемого количество десятков вычитаемого. Если вычитание выполнить нельзя, то займите одну сотню, раздробите ее в десятки и действуйте аналогично п. 2.

④ Цифры оставшихся разрядов перенесите в результат на те же места (учитывая занимаемые единицы разрядов).

Замечание. Над тем разрядом, где занимали единицу, ставьте точку (чтобы не забыть, что он стал на единицу меньше); если точка стоит над нулем, то отнимайте от 9 единиц.



Определите, на сколько a больше b, если $a = 6\ 000\ 600\ 004$, $b = 76\ 800\ 569$. Проверьте ответ вычитанием и сложением.

Решение.

$-\begin{array}{r} 6\ 000\ 600\ 004 \\ 76\ 800\ 569 \\ \hline 5\ 923\ 799\ 435 \end{array}$	Если $a > b$, то можно найти разность $a - b$

Проверка:

а) проверим сложением:

$+\begin{array}{r} 5\ 923\ 799\ 435 \\ 76\ 800\ 569 \\ \hline 6\ 000\ 600\ 004 \end{array}$	Если $a - b = c$, то $c + b = a$

б) проверим вычитанием:

$-\begin{array}{r} 6\ 000\ 600\ 004 \\ 5\ 923\ 799\ 435 \\ \hline 76\ 800\ 569 \end{array}$	Если $a - b = c$, то $a - c = b$

Обе проверки показали, что разность найдена верно.

Ответ: $a > b$ на 5 923 799 435.

Проверь себя!

1. Найдите разность 19 543 891 – 9 865 123. Проверьте результат сложением и вычитанием.

Ответ: 9 678 768.

2. Замените звездочки цифрами:

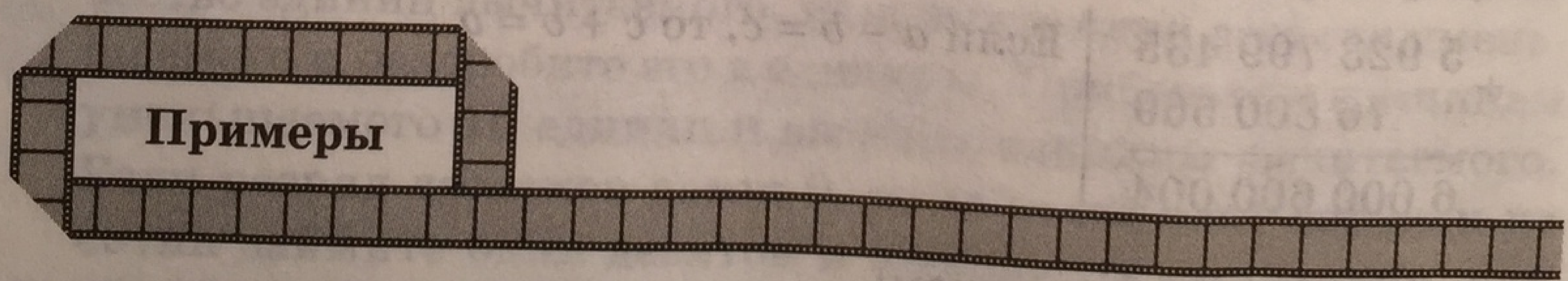
$$\begin{array}{r} -\;*3*46 \\ *7\,*8 \\ \hline 1651* \end{array}$$

Ответ: 23 246 – 6728 = 16 518.

Алгоритм 9. Порядок действий в примерах, содержащих только сложение и вычитание

① Если в примере нет скобок, то выполняйте действия сложения и вычитания по порядку их записи слева направо.

② Если в примере есть скобки, то сначала выполните действие в скобках (п. 1), а затем действия по порядку.



Выполните действия (1—2).

Решение.

1. $200\,100 \overset{1}{-} 30\,724 \overset{2}{+} 900\,818 \overset{3}{-} 69\,694 = 1\,000\,500$

1) $\begin{array}{r} -\,200\,100 \\ 30\,724 \\ \hline 169\,376 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} +\,169\,376 \\ 900\,818 \\ \hline 1\,070\,194 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} -\,1\,070\,194 \\ 69\,694 \\ \hline 1\,000\,500 \end{array}$

2. $\overset{1}{(12\,384 - 1543)} \overset{3}{-} \overset{2}{(45\,278 - 39\,499)} \overset{4}{-} 5062 = 0$

1) $\begin{array}{r} -\,12\,384 \\ 1\,543 \\ \hline 10\,841 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} -\,45\,278 \\ 39\,499 \\ \hline 5\,779 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} -\,10\,841 \\ 5\,779 \\ \hline 5\,062 \end{array}$ 4) $\begin{array}{r} -\,5062 \\ 5062 \\ \hline 0 \end{array}$

3. Найдите такое значение *a*, чтобы было верным равенство

$$904 - (273 + 127) = 904 - a$$

Решение.

904 – 400 = 904 – *a*

a **= 400 (равны уменьшаемые, левая часть равенства равна правой, значит, и вычитаемые равны).**

Попробуй не реши!

Вычислите двумя способами — по алгоритму и с помощью свойств вычитания и законов сложения:

$$22\,302 - (9302 + 7383 + 4617)$$

Ответ: **1000.**

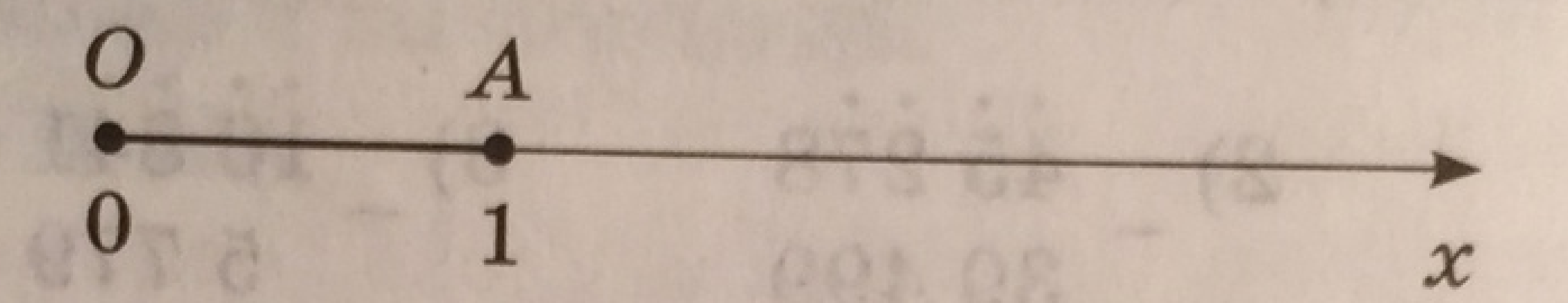
Попробуй-ка реши!

Подумайте, как проще найти сумму всех натуральных чисел от 1 до 50. Найдите сумму (в 3 действия).

Ответ: **1275.**

Изображение и сравнение натуральных чисел на числовом луче

Луч Ox, на котором выбраны единичный отрезок, направление (→) и начало отсчета, называется *числовым лучом*.



Отрезок (OA), длину которого принимают за одну единицу, называется *единичным отрезком*.

Начало луча, точку O, принимают за начало отсчета, ей соответствует число нуль (0).

Числа изображаются на числовом луче точками, причем для каждого натурального числа найдется только одна точка на числовом луче.

Число, которое изображают на числовом луче точкой, называется *координатой* этой *точки*.

Обычно координату точки пишут в скобках.

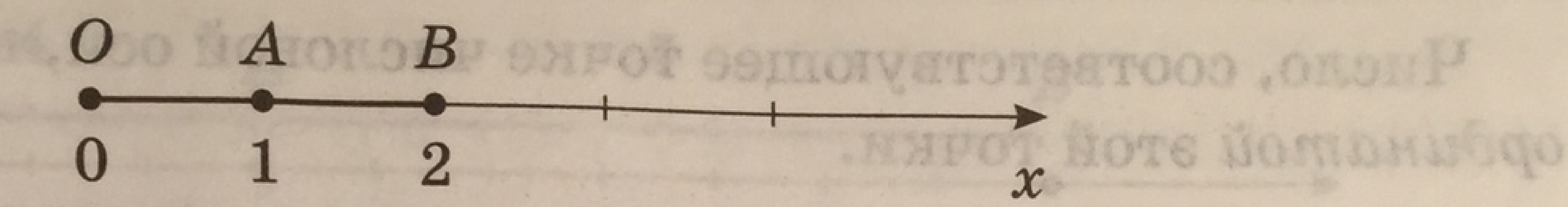
Например, можно записать $A(1)$, $B(3)$, $C(10)$, что читают так: координата точки A равна 1, координата точки B равна 3, координата точки C равна 10.

Числовой луч называют также *числовой осью* (или *координатной прямой*).

Алгоритм 10 Изображение и сравнение натуральных чисел на числовой оси

① Изобразите числовой луч (ось) Ox.

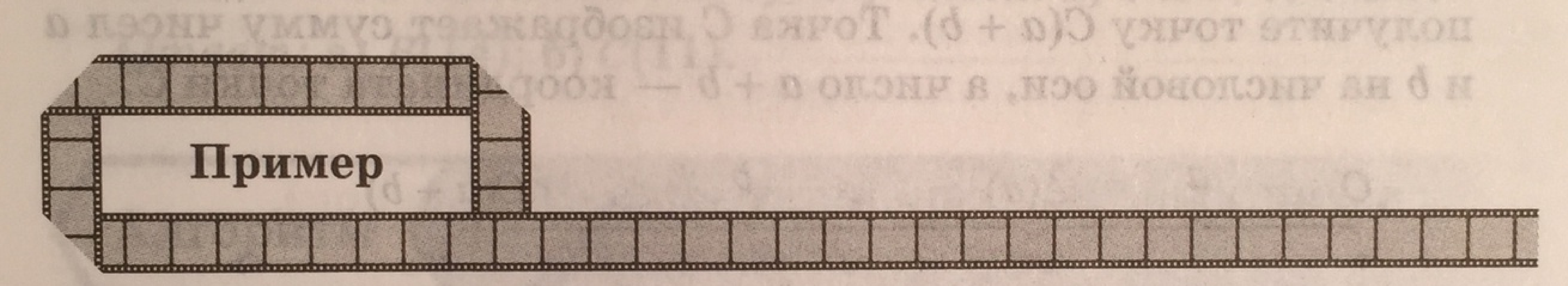
② Отложите от точки O на этом луче отрезок и примите его за единицу (единичный отрезок), получите на оси точку A, изображающую число 1.



③ Отложите на оси от точки O два единичных отрезка друг за другом и поставьте на оси точку B, которая изобразит число 2.

④ Повторите процесс отложения единичного отрезка на оси от точки O, получите точки, изображающие числа 3, 4, 5, 6, ...

Замечание. Большее число на числовой оси изображают точкой, стоящей правее точки, изображающей меньшее число.

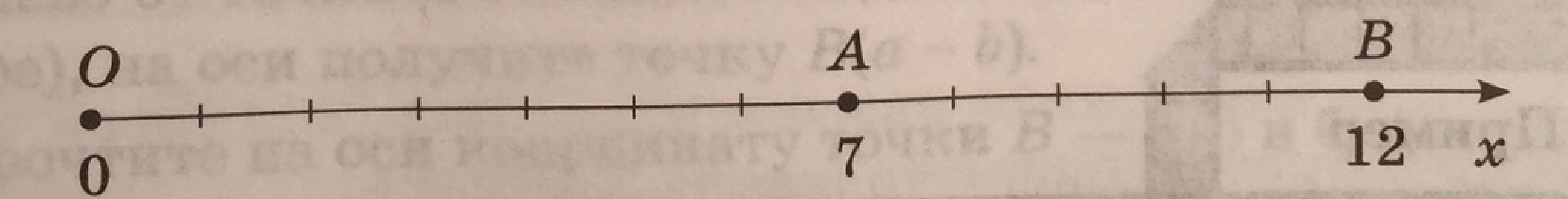


Изобразите на числовой оси числа 7 и 12.

1) Нарисуйте числовой луч Ox.

2) Отложите на луче от точки O семь единичных отрезков, получите точку $A(7)$, изображающую на оси число 7 (координата точки A равна 7).

3) Отложите на луче Ox от точки O двенадцать единичных отрезков, получите точку $B(12)$, изображающую число 12 (координата точки B равна 12).



Заметим, что точка B, изображающая число 12, стоит на оси правее точки A, изображающей число 7, так как $12 > 7$.

Вывод. Натуральное число n изображается на числовом луче точкой, полученной в результате отложения n единичных отрезков от начала луча. Из двух чисел большее изображается точкой, расположенной на числовой оси правее.

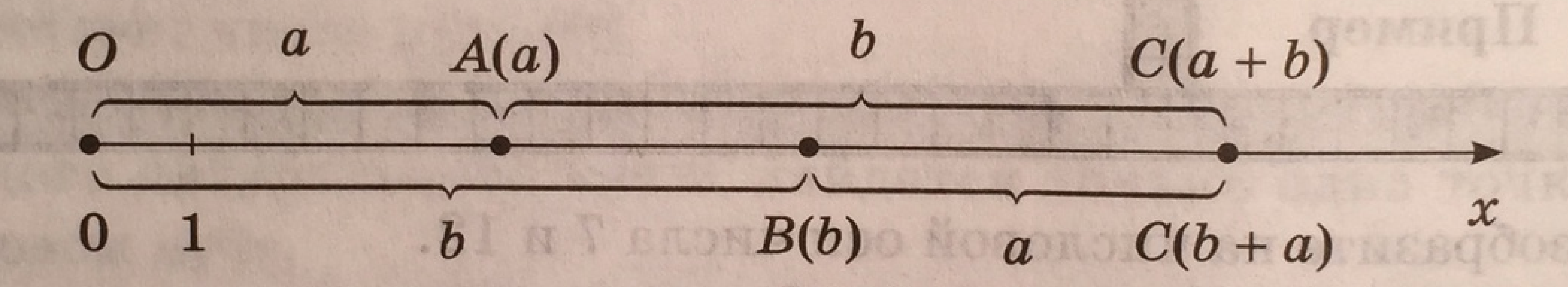
Число, соответствующее точке числовой оси, называется *координатой* этой точки.

Алгоритм 11 Сложение натуральных чисел на числовом луче

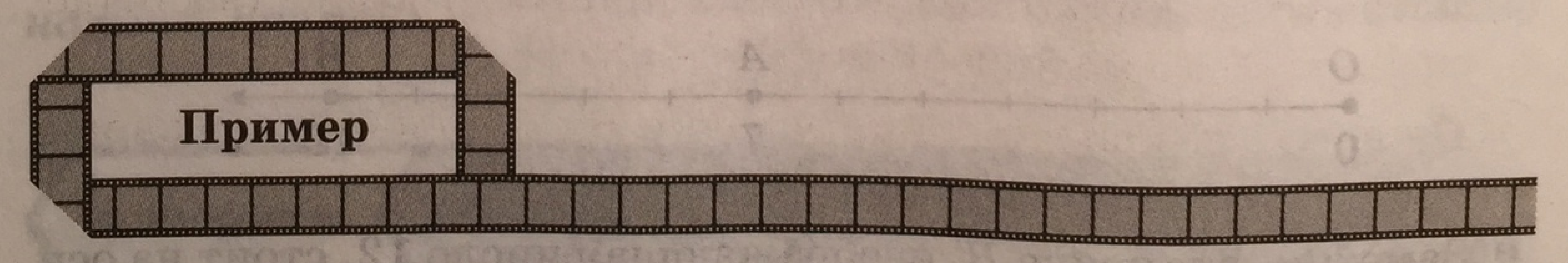
① Изобразите числовой луч Ox.

② От точки O отложите a единичных отрезков, получите точку $A(a)$.

③ Отложите от точки $A(a)$ вправо еще b единичных отрезков, получите точку $C(a + b)$. Точка C изображает сумму чисел a и b на числовой оси, а число $a + b$ — координата точки C.



Замечание. Можно откладывать от 0 сначала b единичных отрезков, получив точку $B(b)$, а затем a единичных отрезков, получив точку с координатой $b + a$, которая совпадает с точкой $C(a + b)$, так как $a + b = b + a$. Это является геометрической иллюстрацией переместительного закона сложения (на числовом луче).

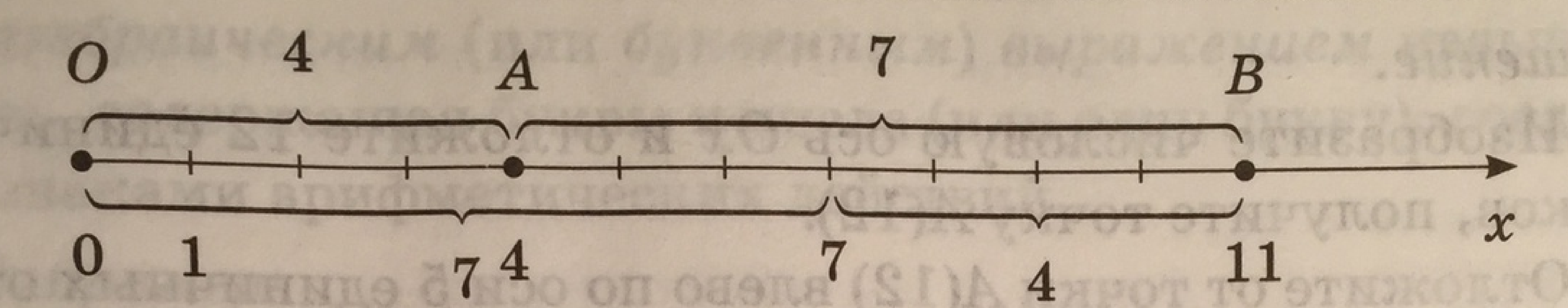


Изобразите на числовом луче сумму чисел 4 и 7.

Решение.

1) Постройте числовой луч Ox.

2) На оси Ox от точки 0 отложите 4 единичных отрезка, получите точку $A(4)$.



3) Отложите от точки $A(4)$ вправо еще 7 единичных отрезков, получите точку $B(11)$, которая изображает сумму чисел $4 + 7$.

Проверь себя!

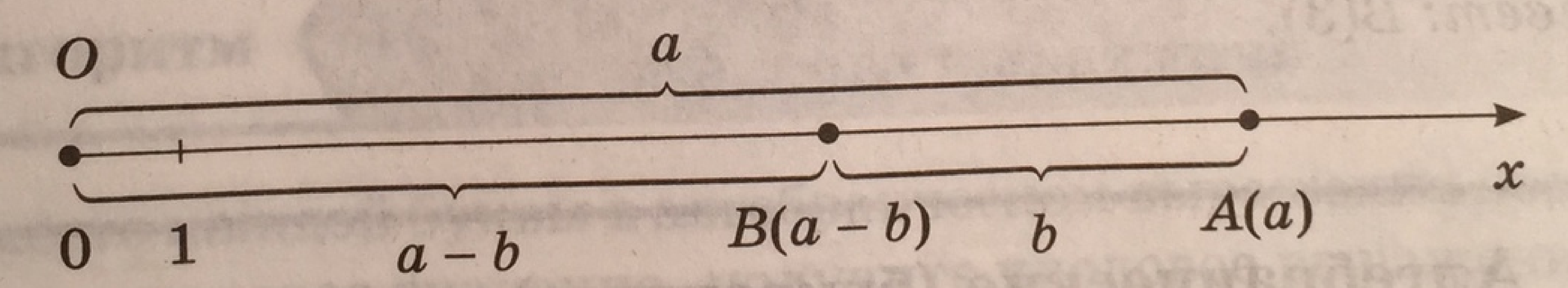
Найдите на числовой оси сумму чисел: а) 5 и 9; б) 3 и 8.

Ответ: а) $B(14)$; б) $C(11)$.

Алгоритм 12 Вычитание натуральных чисел на числовом луче

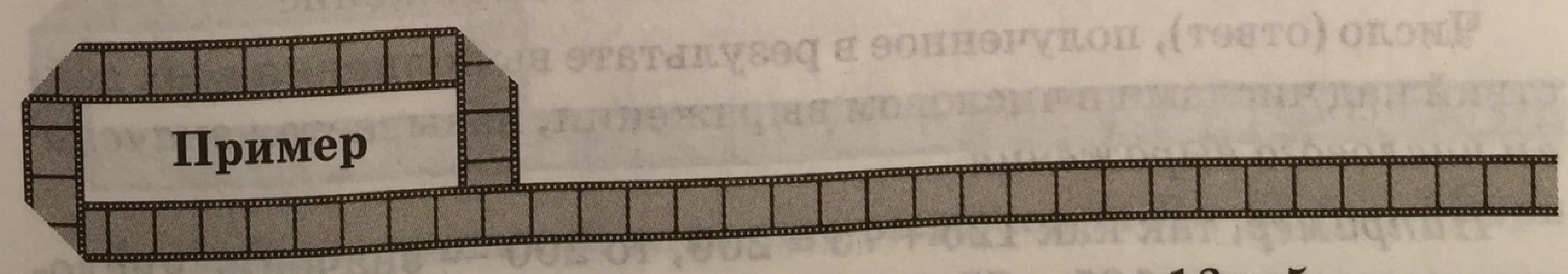
① Изобразите числовой луч Ox.

② Изобразите на оси уменьшаемое a — это точка $A(a)$.



③ Влево от точки A отложите b единичных отрезков (вычитаемое), на оси получите точку $B(a - b)$.

④ Прочтите на оси координату точки B — это и будет разность $a - b$.



Изобразите на числовой оси разность чисел 12 и 5.

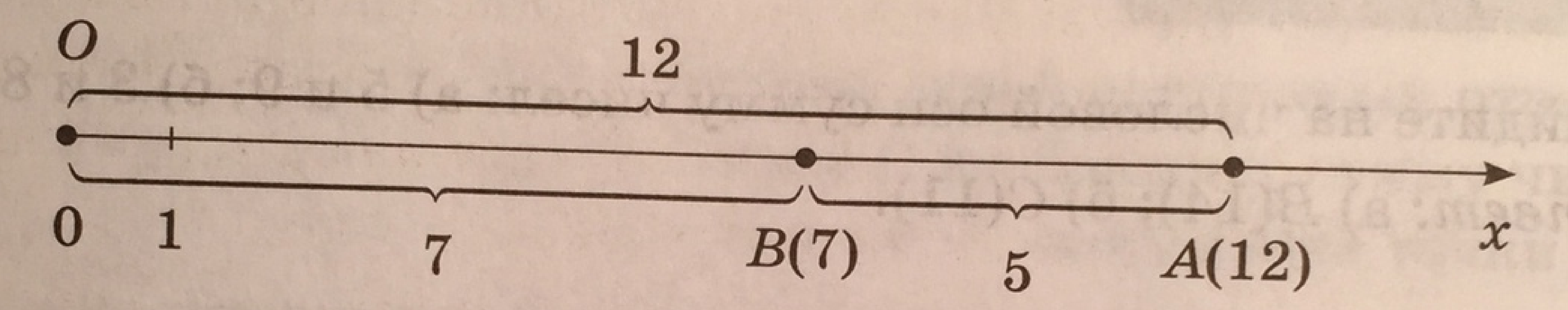
Решение.

1) Изобразите числовую ось Ox и отложите 12 единичных отрезков, получите точку $A(12)$.

2) Отложите от точки $A(12)$ влево по оси 5 единичных отрезков, получите точку B.

3) Найдите координату точки B — число 7, это и есть разность 12 – 5.

4) Проверьте ответ с помощью рисунка на оси сложением: 7 + 5 = 12.



Ответ: точка $B(7)$ на числовом луче (см. рисунок).

Проверь себя!

Изобразите на числовом луче разность чисел 11 и 8.

Ответ: $B(3)$.

Алгебраические (буквенные) выражения

Числовым выражением называется запись, в которой числа соединены знаками арифметических действий.

Например, 17 · 2 + 25 – 10 — числовое выражение

Число (ответ), полученное в результате выполнения всех действий над числами в числовом выражении, называется *значением числового выражения.*

Например, так как 125 + 75 = 200, то 200 — значение числового выражения 125 + 75

Алгебраическим (или ***буквенным***) ***выражением*** называется запись, содержащая буквы и числа (или одну букву), соединенные знаками арифметических действий.

Например:

c, $2a$, $a + 10$, $a + b \cdot c$, $2a + 3b$ — буквенные выражения

Числовыми значениями букв называются числа, которыми можно заменить буквы.

Например, $a + 3 = 5$, если $a = 2$ — значение буквы

Если в ***буквенное*** выражение вместо каждой буквы подставить ее числовое значение, то получится числовое выражение, значение которого называется ***числовым значением*** данного ***буквенного выражения*** при данных значениях букв.

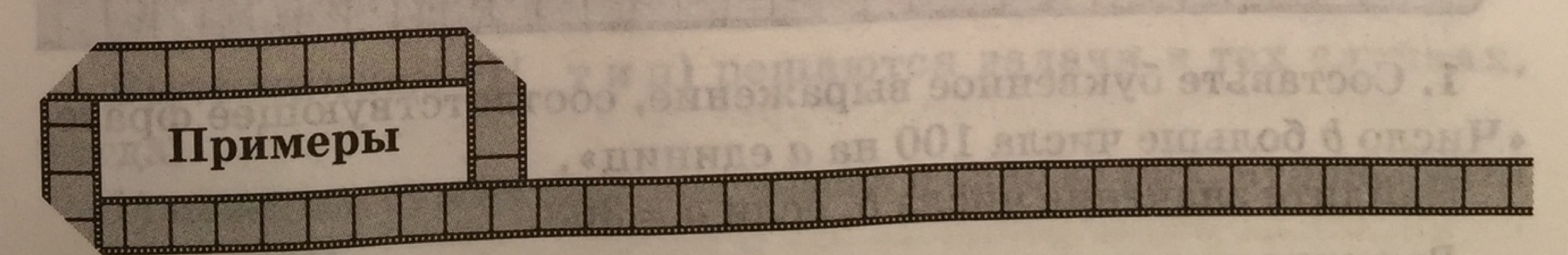
Например, чтобы найти значение выражения $x + 5$ при $x = 1$; 3; 5, вместо x подставляем числа 1, 3, 5 и вычисляем: $1 + 5 = 6$; $3 + 5 = 8$; $5 + 5 = 10$, т. е. 6, 8, 10 — искомые значения буквенного выражения.

Алгоритм 13 Нахождение числового значения буквенного выражения

① Вместо каждой буквы в алгебраическом выражении подставьте ее числовое значение, получите числовое выражение.

② Выполните действия в числовом выражении.

③ Ответ запишите числом.



1. Найдите числовое значение выражения $P = 2 \cdot (a + b)$ при $a = 12$, $b = 5$.

Решение.

$P = 2 \cdot (12 + 5) = 2 \cdot 17 = 34$

Ответ: $P = 34$.

2. Найдите значение выражения $(135 + n) - 23$ при: а) $n = 0$; б) $n = 73$.

Решение.

а) $(135 + n) - 23 = (135 + 0) - 23 = 135 - 23 = 112$ | $a + 0 = a$

б) $(135 + 73) - 23 = 135 + (73 - 23) = 135 + 50 = 185$ | $(a + b) - c = a + (b - c)$

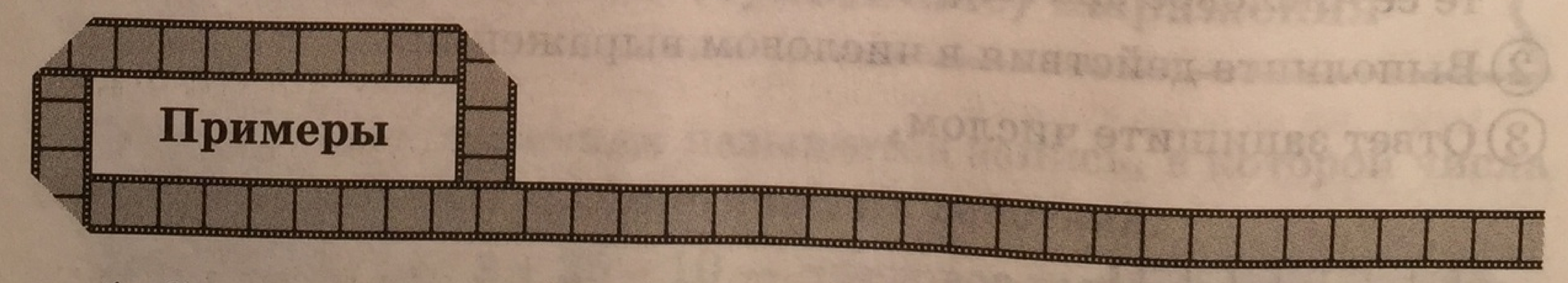
Ответ: а) 112; б) 185.

Обратите **внимание на смысл предлога «на»** при сложении и вычитании чисел.

1. Если число a меньше числа b на некоторое число c, то меньшее число a находится вычитанием: $a = b - c$, а большее число находится сложением: $b = a + c$.

2. Если $a < b$ на c, то $b > a$ на c, поэтому нередко удобнее при решении примеров выполнять действие сложения: $b = a + c$.

3. Чтобы узнать, на сколько число b больше числа a, надо выполнить вычитание: $b - a = c$.



1. Составьте буквенное выражение, соответствующее фразе: «Число b больше числа 100 на a единиц».

Найдите значение числа b, если $a = 303$.

Решение.

1) $b = 100 + a$ | $b > 100$ на a

2) Если $a = 303$, то $b = 100 + 303 = 403$ | $b = 100 + a$

Ответ: $b = 403$.

2. Найдите сумму двух чисел a и b, если $a = 25$, а число b на 15 меньше числа a.

Решение.

1) $b = a - 15$ 2) Если $a = 25$, то $b = 25 - 15 = 10$ 3) $a + b = 25 + 10 = 35$	$b < a$ на 15, тогда $a > b$ на 15, $b = a - 15$

Ответ: $a + b = 35$.

Проверь себя!

Число a на b единиц больше, чем число 125. Найдите число a, если: а) $b = 1$; б) $b = 15$.

Ответ: а) $a = 126$; б) $a = 140$.

Решение задач на сложение и вычитание натуральных чисел

Сложением (I т и п) решаются задачи в тех случаях, когда:

1) даны несколько чисел и нужно найти их сумму;
2) требуется найти большее число ($b > a$ на c, тогда $b = a + c$).

Вычитанием (II т и п) решаются задачи в тех случаях, когда:

1) известна сумма двух слагаемых и одно из них, нужно найти другое;
2) требуется найти меньшее число ($a < b$ на c, тогда $a = b - c$);
3) требуется найти, на сколько одно число меньше другого.

Алгоритм 14 Решение задач на сложение и вычитание

① Запишите краткое условие задачи: *Дано* и *Найти* (обозначив буквами a, b, c, ... все данные величины в задаче).

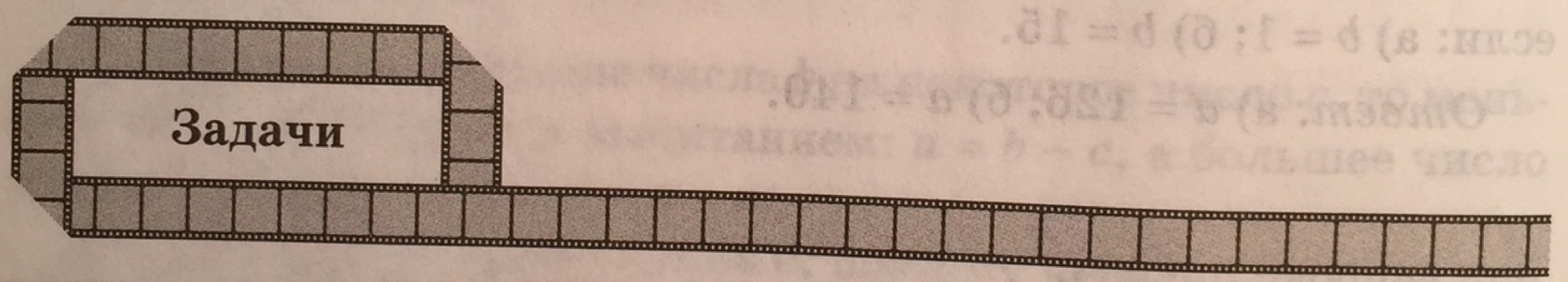
② Составьте общую формулу решения задачи, используя буквенные обозначения.

③ Если какая-либо из обозначенных величин a, b, c, ... неизвестна, то найдите ее по условию задачи.

④ Подставьте числовые значения букв в общую формулу решения и найдите ответ.

⑤ Ответ запишите полностью.

Замечание. Этот алгоритм применим к решению задач на умножение и деление.



Рассмотрим задачи I типа.

1. В первый день туристы прошли 15 км. Во второй день на 3 км больше. Сколько всего километров прошли туристы за два дня?

Дано:

I день	$a = 15$ км	c км прошли за два дня
II день	$b > a$ на 3 км	

Найти путь, пройденный туристами за два дня.

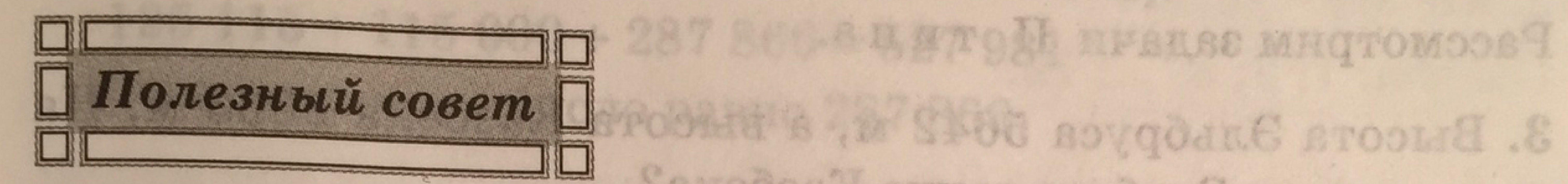
Решение.

Общая формула решения: $c = a + b$

1) $b = 15 + 3 = 18$ (км) прошли туристы за II день | $b = a + 3$

2) $c = 15 + 18 = 33$ (км) прошли туристы за два дня | $c = a + b$

Ответ: за два дня туристы прошли 33 км.



Полезный совет

Если первая величина меньше второй, то вторая больше первой, тогда удобнее находить бóльшую величину сложением.

2. В одной пачке 23 книги, причем в ней на 8 книг меньше, чем в другой, а в третьей пачке на 6 книг больше, чем во второй. Сколько всего книг в трех пачках?

Дано:

I пачка	$a = 23$ книги	
II пачка	$b > a$ на 8 книг	S книг в трех пачках
III пачка	$c > b$ на 6 книг	

Найти количество книг в трех пачках.

Решение.

Общая формула решения: $S = a + b + c$

1) $b = 23 + 8 = 31$ (книга) во II пачке	$b = a + 8$
2) $c = 31 + 6 = 37$ (книг) в III пачке	$c = b + 6$
3) $S = 23 + 31 + 37 = (23 + 37) + 31 = 60 + 31 =$ $= 91$ (книга) в трех пачках	$S = a + b + c$

Ответ: в трех пачках 91 книга.

Проверь себя!

Задача. С первой яблони собрали 240 кг яблок, а со второй яблони собрали на 90 кг яблок больше, чем с первой. С третьей

яблони собрали на 150 кг яблок больше, чем с первой. Сколько килограммов яблок собрали с трех яблонь?

Ответ: с трех яблонь собрали 960 кг яблок.

Рассмотрим задачи II типа.

3. Высота Эльбруса 5642 м, а высота Казбека 5033 м. На сколько метров Эльбрус выше Казбека?

Дано:

Казбек	$a = 5033$ м	
Эльбрус	$b = 5642$ м	$b > a$

Найти, на сколько метров Эльбрус выше Казбека.

Решение.

Общая формула решения: $b - a = c$

5642 – 5033 = 609 (м)

Ответ: Эльбрус выше Казбека на 609 м.

4. Сумма трех чисел равна 527 981, первое число равно 125 115, а второе — на 10 115 меньше первого числа. Найдите третье число.

Дано:

I число	$a = 125\,115$	
II число	$b < a$ на 10 115	
III число	c	$a + b + c = 527\,981$

Найти третье число.

Решение.

Общая формула решения: $a + b + c = 527\,981$

1) $b = 125\,115 - 10\,115 = 115\,000$	$b < a$; $b = a - 10\,115$
2) Подставим a и b в формулу:	$a + b + c = 527\,981$
$125\,115 + 115\,000 + c = 527\,981$	
$240\,115 + c = 527\,981$	

$c = 527\,981 - 240\,115$
$c = 287\,866$

$$\begin{array}{r} -\,527\,981 \\ 240\,115 \\ \hline 287\,866 \end{array}$$

Проверка (по формуле $a + b + c = 527\,981$):
$125\,115 + 115\,000 + 287\,866 = 527\,981$

Ответ: третье число равно 287 866.

5. В одной книге a страниц, а в другой на b страниц меньше, чем в первой. В третьей книге на c страниц меньше, чем во второй. Сколько страниц в третьей книге, если $a = 375$, $b = 37$, $c = 56$?

Дано:

I книга	a страниц
II книга	меньше a на b
III книга	меньше II книги на c

Найти число страниц в III книге.

Решение.

Здесь трудно записать через буквы общую формулу, условно запишем так: $\boxed{III} = \boxed{II} - c$.

1) $a - b$ (страниц) во II книге — $\boxed{II} = \boxed{I} - b$
2) $(a - b) - c$ (страниц) в III книге — $\boxed{III} = \boxed{II} - c$

3) Найдем значение выражения при заданных значениях a, b, c:
$(375 - 37) - 56 = 338 - 56 = 282$ (страницы) в III книге

Ответ: в третьей книге 282 страницы.

Проверь себя!

Задача. Первое число 527 981, второе число на 9999 меньше первого и на 385 больше третьего. Найдите третье число.

Ответ: 517 597.

Попробуй-ка реши!

Задача 1. Сумма 12 различных натуральных чисел равна 78. Найдите эти числа.

Ответ: 1; 2; 3; ...; 12.

Задача 2. Старший брат сказал младшему: «Дай мне восемь орехов, тогда у меня будет вдвое больше орехов, чем у тебя». Младший ответил: «Дай ты мне восемь орехов, и у нас будет орехов поровну». Сколько орехов было у каждого брата?

Ответ: 56 орехов и 40 орехов.

Умножение натуральных чисел

Произведение натуральных чисел — это сумма одинаковых слагаемых.

Умножить натуральное число a на натуральное число b ($b > 1$) — это значит найти сумму b слагаемых, каждое из которых равно a.

$$a \cdot b = \underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{b \text{ слагаемых}} = c$$

Если $b = 1$, то $a \cdot 1 = a$

$$a \cdot b = c$$

множители (a, b) произведение (c)

Умножение на нуль

$$a \cdot 0 = 0$$
$$0 \cdot b = 0$$
$$0 \cdot 0 = 0$$
$$0 \cdot 1 = 0$$

Если $a \cdot b = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$
$a \cdot b = 0$, если $a = 0$ или $b = 0$

Действие умножения называют действием II ступени, и его выполняют первым в примерах на сложение, вычитание и умножение.

Законы умножения

$a \cdot b = b \cdot a$ (*переместительный*)
$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (*сочетательный*)
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$ | (*распределительный*)

Замечания

1. Переместительный закон умножения применяется для упрощения и для контроля результата умножения.

Например, при вычислении произведения чисел 25 и 1228 проще вместо $25 \cdot 1228$ записать $1228 \cdot 25$ (в первом случае при умножении в столбик четыре произведения, а во втором только два).

$$\begin{array}{r} \times\ 25 \\ 1228 \\ \hline 200 \\ 50 \\ +\ 50 \\ 25 \\ \hline 30700 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 1228 \\ 25 \\ \hline 6140 \\ +\ 2456 \\ \hline 30700 \end{array}$$

2. Сочетательный закон умножения применяется при вычислении произведения трех и более чисел.

Например, произведение $125 \cdot 285 \cdot 8$ можно вычислить так: $125 \cdot 285 \cdot 8 = 125 \cdot 8 \cdot 285 = (125 \cdot 8) \cdot 285 = 1000 \cdot 285 = 285 \cdot 1000 = 285\,000$

Сначала применили переместительный закон, а затем сочетательный $(125 \cdot 8)$ и снова переместительный $(1000 \cdot 285 = 285 \cdot 1000)$. Часто применяют переместительный закон, не прописывая подробно, как это сделали мы в примере, а сразу записывают в скобки ту пару чисел, которые удобно умножать.

Сочетательный закон умножения справедлив для любого числа множителей.

Например, можно записать:

$$25 \cdot 4 \cdot 125 \cdot 821 \cdot 8 = (25 \cdot 4) \cdot (125 \cdot 8) \cdot 821 = 100 \cdot 1000 \cdot 821 = (100 \cdot 1000) \cdot 821 = 82\,100\,000$$

Внимание! Умножаем всегда только два числа.

При умножении нескольких чисел множители можно переставлять местами и группировать по два разными способами.

3. Распределительный закон умножения относительно сложения и вычитания помогает упрощать вычисления при умножении суммы или разности двух чисел на число.

Например, можно умножать числа так:

а) $1203 \cdot 11 = 1203 \cdot (10 + 1) = 1203 \cdot 10 + 1203 \cdot 1 = 12\,030 + 1203 = 13\,233$

б) $52 \cdot 99 = 52 \cdot (100 - 1) = 5200 - 52 = 5148$

$a \cdot (b + c) = ab + ac$
$11 = 10 + 1$
$a \cdot (b - c) = ab - ac$
$99 = 100 - 1$

Распределительный закон применяется и для нескольких слагаемых:

$$(a + b + c) \cdot m = am + bm + cm$$

Этот закон можно применять справа налево:

$$a \cdot c + b \cdot c = (a + b) \cdot c, \quad a \cdot c - b \cdot c = (a - b) \cdot c$$

Например:

$3 \cdot x + 5 \cdot x = (3 + 5) \cdot x = 8 \cdot x$

$5 \cdot y - 2 \cdot y = (5 - 2) \cdot y = 3 \cdot y$

$2 \cdot m + m + 4 \cdot m = (2 + 1 + 4) \cdot m = 7 \cdot m$

Примеры

Вычислите, применяя законы умножения (1—7).

1. $2 \cdot 385 \cdot 5 = (2 \cdot 5) \cdot 385 = 10 \cdot 385 = 3850$	$a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
2. $4 \cdot 253 \cdot 25 = (4 \cdot 25) \cdot 253 = 100 \cdot 253 = 25\,300$	$a \cdot b = b \cdot a$
3. $23 \cdot 65 + 77 \cdot 65 = (23 + 77) \cdot 65 = 100 \cdot 65 = 6500$	$a \cdot c + b \cdot c = (a + b) \cdot c$
4. $234 \cdot 9 = (10 - 1) \cdot 234 = 2340 - 234 = 2106$	$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$
5. $86 \cdot 1001 = (1000 + 1) \cdot 86 = 86\,000 + 86 = 86\,086$	$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
6. $150 \cdot 0 = 0$	$a \cdot 0 = 0$
7. $1002 \cdot 1 = 1002$	$a \cdot 1 = a$

8. Решите уравнение $2x + 3x = 500$.

Решение.

$2x + 3x = 500$ $(2 + 3)x = 500$	$a \cdot x + b \cdot x = (a + b) \cdot x$
$5x = 500$ $x = 500 : 5$ $x = 100$	$a \cdot x = b$ $x = b : a$

Проверь себя!

Вычислите произведение, применяя законы умножения:
а) 10 · 373 · (1208 – 1208); б) 4 · 281 · 25; в) 8 · 25 · 4 · 10;
г) (54 + 125) · 8; д) 256 · 67 – 156 · 67

Ответ: а) 0; б) 28 100; в) 8000; г) 1432; д) 6700.

Алгоритм 15 Нахождение предполагаемого ответа при умножении натуральных чисел

① Округлите каждый множитель до единиц старшего разряда или до разряда, стоящего за ним (см. алгоритм 4).

② Умножьте приближенные числа; получите число, с которым надо сравнить ответ.

③ Вычислите произведение заданных чисел.

④ Сравните полученный ответ с приближенным произведением по количеству разрядов; если получилась разница в несколько разрядов, то пересчитайте произведение.

Примеры

1. Найдите произведение 27 400 · 5695.

Решение.

27 400 · 5695 = 156 043 000

Получили одинаковое количество разрядов, значит, ответ может быть найден верно.

27400 ≈ 30 000

5695 ≈ 6000

30 000 · 6000 = 180 000 000

2. Найдите произведение чисел $a = 37\,500$ и $b = 601$, предварительно сделав «прикидку».

Решение.

$$\begin{array}{r} \times\ 37500 \\ 601 \\ \hline 375 \\ +\ 2250\ . \\ \hline 22537500 \end{array}$$

$\underline{3}\boxed{7}500 \approx 40\,000$

$601 \approx 600$

$40\,000 \cdot 600 = 24\,000\,000$

Количество разрядов совпадает, значит, результат может быть найден верно.

Проверь себя!

«Прикиньте» ответ в произведении чисел $2506 \cdot 10\,025$, вычислите произведение и оцените правильность ответа.

Ответ: $\approx 40\,000\,000$; $25\,122\,650$.

Алгоритм 16 Умножение многозначных чисел на однозначное число

① Умножьте единицы многозначного числа на однозначное число и, если получилось двузначное число, запишите единицы под единицами, десятки запомните.

② Умножьте десятки многозначного числа на однозначное число и к десяткам прибавьте десятки из п. 1; если в этом произведении получились сотни, то их запомните, а десятки запишите под десятками.

③ Умножьте сотни на число и к полученным сотням прибавьте сотни из п. 2; если в этом произведении получились тысячи, то их запомните, а сотни запишите под сотнями.

④ Повторите операцию умножения до умножения единиц высшего разряда, получите произведение многозначного числа на однозначное число.

Например:

$275 \cdot 4 = 1100$

$$\begin{array}{r} \times\ 275 \\ 4 \\ \hline 1100 \end{array}$$

Замечание

Чтобы не забыть число, которое будем прибавлять к единицам следующего разряда, можно писать его над этим разрядом мелкими цифрами.

Алгоритм 17 Умножение многозначных чисел, не содержащих нулей

① Запишите числа друг под другом: единицы под единицами, десятки под десятками и т. д.

② Умножьте первое число на единицы второго числа (алгоритм 16), получите первое неполное произведение.

③ Умножьте первое число на десятки второго числа (алгоритм 16) и запишите десятки под десятками первого неполного произведения.

④ Умножьте первое число на сотни второго числа (алгоритм 16), продолжайте умножение далее на единицы тысяч и так до тех пор, пока не умножите первое число на единицы старшего разряда, подписывая сотни под сотнями, тысячи под тысячами и т. д.

⑤ Сложите неполные произведения в столбик, получите ответ.

Например, произведение 1243 · 259 находим так:

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 1243 \\ 259 \end{array} \\ \hline 11187 \\ + \, 6215 \\ 2486 \\ \hline 321937 \end{array}$$

Замечание. Умножайте на то число, в котором меньше разрядов.

Алгоритм 18 Умножение на число, содержащее нули в разрядах

① Умножьте первое число на единицы второго числа (алгоритм 16).

② Если в разряде десятков стоит нуль, то умножьте на сотни и подпишите сотни под сотнями, а разряд десятков пропустите (на его месте поставьте точку, чтобы не спутать разряды).

Например:

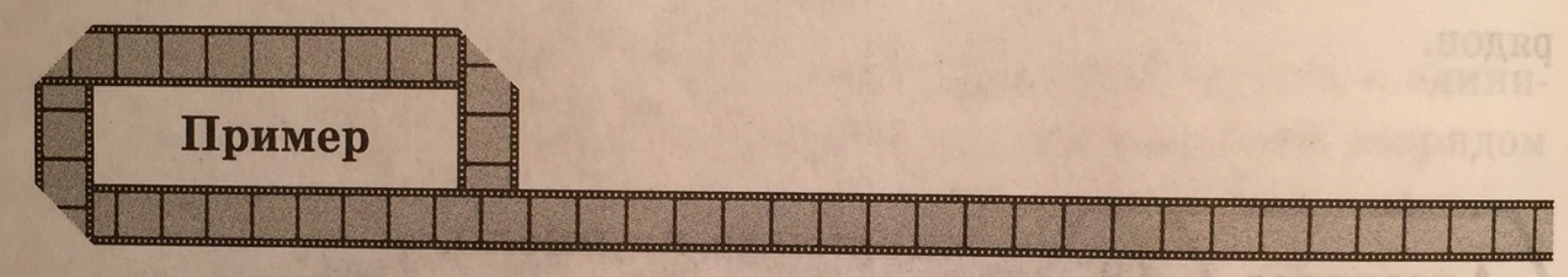
$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 234 \\ 102 \end{array} \\ \hline 468 \\ + \, 234. \\ \hline 23868 \end{array}$$

③ Если и разряд сотен содержит нуль, то умножьте на тысячи и подпишите тысячи под тысячами, разряды десятков и сотен пропустите, а на их месте поставьте точки, чтобы не ошибиться.

Например:

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 128 \\ 2002 \end{array} \\ \hline + \begin{array}{r} 256 \\ 256.\,. \end{array} \\ \hline 256256 \end{array}$$

④ Сложите полученные неполные произведения, получите ответ.


Пример

Найдите произведение чисел 1034 · 701.

Решение.

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 1034 \\ 701 \end{array} \\ \hline + \begin{array}{r} 1034 \\ 7238. \end{array} \\ \hline 724834 \end{array}$$

Ответ: 1034 · 701 = 724 834.

Алгоритм 19 Умножение чисел, оканчивающихся нулями

① Запишите числа так, чтобы первые с конца отличные от нулей цифры были подписаны друг под другом.

Например, вычисляя произведение 52 100 · 1050, запишем так:

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 52100 \\ 1050 \end{array} \\ \hline \end{array}$$

② **Умножайте числа, не обращая внимания на нули в конце чисел (алгоритм 14).**

Например, в том же произведении 521 · 105

③ **Сложив неполные произведения, припишите к сумме справа столько нулей, сколько их в обоих множителях.**

Например:

$$\begin{array}{r} \times\ 52100 \\ 1050 \\ \hline 2605 \\ +\ 521\,.\ \\ \hline 54705000 \end{array}$$

Примеры

Вычислите (1—3).

1. 1008 · 2450 = 2450 · 1008 = 2 469 600

Решение.

$$\begin{array}{r} \times\ 2450 \\ 1008 \\ \hline 1960 \\ +\ 245\,.\,.\ \\ \hline 2469600 \end{array}$$

a · b = b · a
2450 ≈ 2500
1008 ≈ 1000
2500 · 1000 = 2 500 000

2. 27 400 · 5695 = 5695 · 27 400 = 156 043 000

Решение.

$$\begin{array}{r} \times\ 5695 \\ 27400 \\ \hline 22780 \\ +\ 39865\ \\ +\ 11390\ \ \\ \hline 156043000 \end{array}$$

a · b = b · a
5695 ≈ 6000
27 400 ≈ 30 000
6000 · 30 000 = 180 000 000

3. $580 \cdot 205 = 118\,900$

Решение.

$$\begin{array}{r} \times\ 580 \\ 205 \\ \hline 290 \\ +\ 116. \\ \hline 118900 \end{array}$$

$580 \approx 600$
$205 \approx 200$
$600 \cdot 200 = 120\,000$

Проверь себя!

Вычислите: а) $8040 \cdot 125$; б) $17\,050 \cdot 5050$.

Ответ: а) 1 005 000; б) 86 102 500.

Решение задач на умножение натуральных чисел

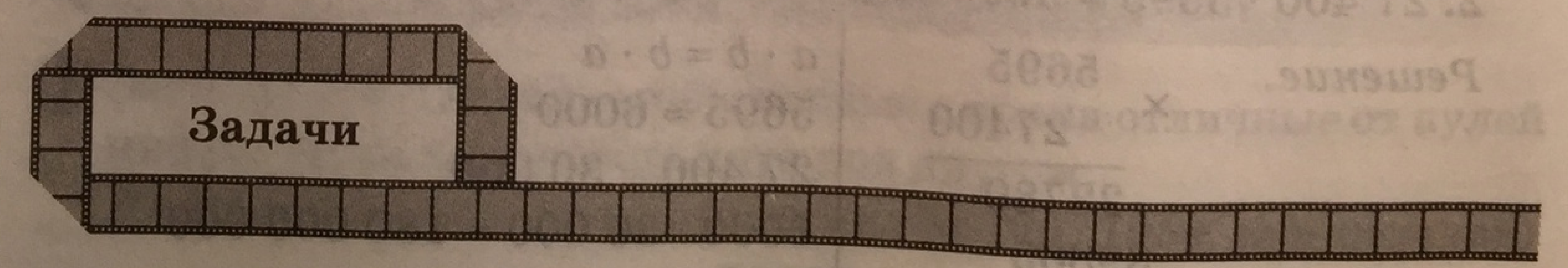
Если $a > b$ в n раз, то $b < a$ в n раз.

Если $a > b$ в n раз, то большее число находят умножением:

$$a = b \cdot n$$

Если дано число a и требуется найти сумму b слагаемых, каждое из которых равно a, тогда $a \cdot b = c$.

Замечание. Решайте задачи с помощью алгоритма 14.



1. Вес одного яблока в среднем 150 г. Сколько весят 20 таких яблок?

Дано:

1 яблоко	$a = 150$ г
20 яблок	$b > a$ в 20 раз

Найти вес яблок.

Решение.

Общая формула решения: $b = a \cdot 20$

$b = 150 \cdot 20 = 3000$ г $= 3$ кг весят 20 яблок | $b = a \cdot 20$

Ответ: 20 яблок весят 3 кг.

2. Длина отрезка MN в 3 раза больше длины отрезка OP, а длина отрезка OP в 4 раза больше длины отрезка AB. Найдите длину отрезка MN, если $AB = 3$ см 2 мм.

Дано:

AB	$a = 3$ см 2 мм
MN	$b > c$ в 3 раза
OP	$c > a$ в 4 раза

Найти длину отрезка MN.

Решение.

Общая формула решения: $MN = c \cdot 3$

1) $c = 3$ см 2 мм $\cdot 4 = 12$ см 8 мм
2) $MN = 12$ см 8 мм $\cdot 3 = 36$ см 24 мм $=$
$= 38$ см 4 мм

| $c = a \cdot 4$
| $MN = c \cdot 3$
| 1 см = 10 мм

Ответ: $MN = 38$ см 4 мм.

Проверь себя!

Задача 1. Одна коробка карандашей стоит 12 р. Сколько стоят: а) 15 коробок; б) x коробок?

Ответ: а) 180 р.; б) $12x$ р.

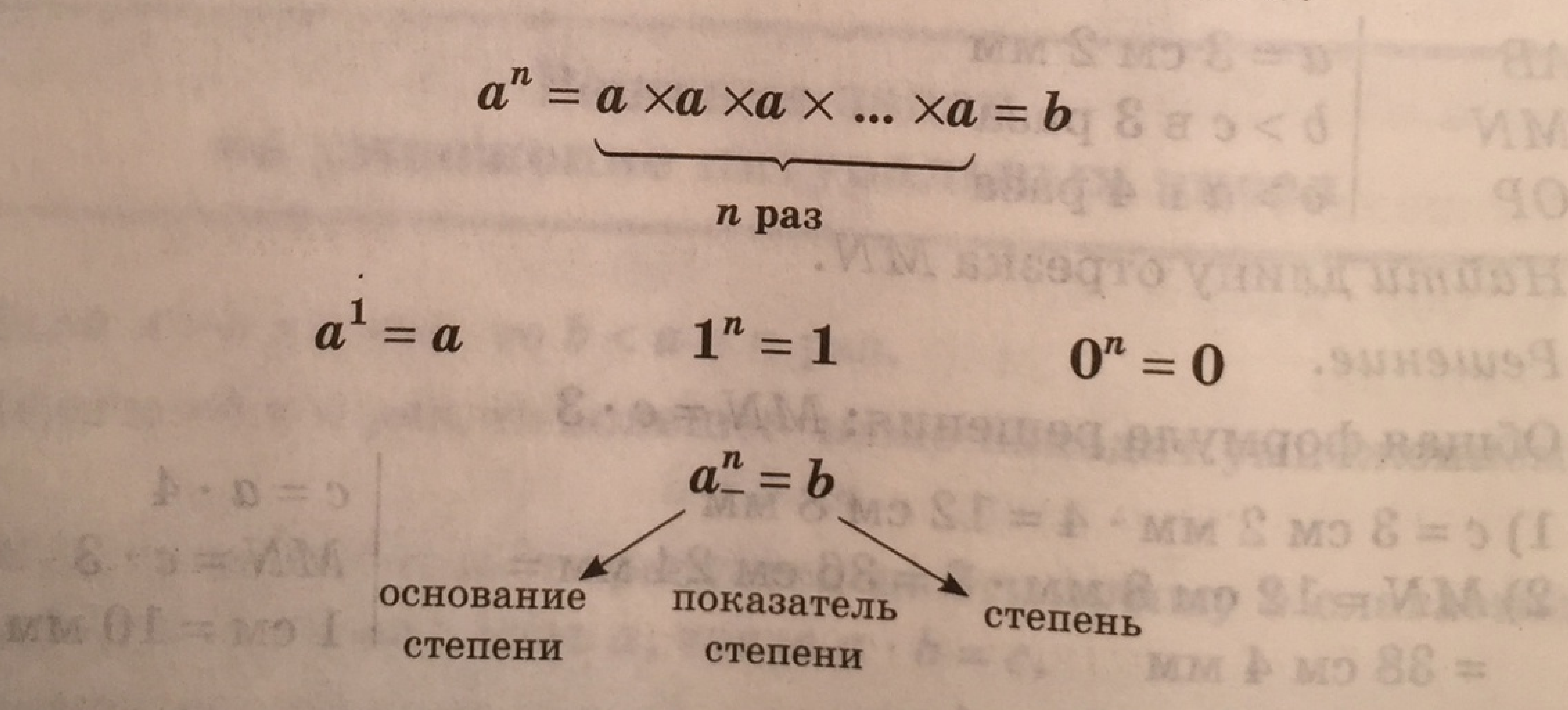
Задача 2. Сердце человека делает 70 сокращений в минуту. При каждом сокращении сердце перекачивает 100 г крови. Сколько крови перекачает сердце: а) за 1 час; б) за сутки?

Ответ: а) 420 кг крови; б) 10 080 кг крови.

Возведение числа в степень с натуральным показателем

Умножение одинаковых чисел называется *возведением в степень*.

Произведение n множителей ($n > 1$), каждый из которых равен a, называется *натуральной степенью* числа a.



a — основание степени (число, которое умножается само на себя n раз)

n — показатель степени (число, которое показывает, сколько множителей)

b — степень (число, которое получается при умножении числа a самого на себя n раз)

Например: $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ — пятая степень числа 2

Чтение чисел, записанных в виде степени

При чтении n-й степени числа a (т. е. a^n) сначала назовите основание степени a, затем показатель степени n.

Например: 3^4 — три в четвертой степени

Можно назвать сначала показатель степени n, затем основание степени a.

Например: 2^5 — пятая степень числа два

Замечание. Степень a^2 (a во второй степени) можно читать иначе: «a в квадрате» или «квадрат числа a», что связано с площадью квадрата со стороной a (так как $S = a \cdot a = a^2$); степень a^3 (a в третьей степени) можно читать как «a в кубе» или «куб числа a», что связано с формулой объема куба со стороной a (так как $V = a \cdot a \cdot a = a^3$).

Итак, $a^2 = a \cdot a$ — квадрат числа a, $a^3 = a \cdot a \cdot a$ — куб числа a.

Степень $10^n = 10...0$ (n нулей после единицы) часто встречается в математике, в других областях знаний и на практике.

Алгоритм 20 Вычисление степени числа a

① Найдите в записи a^n показатель степени n. Количество множителей числа a равно n.

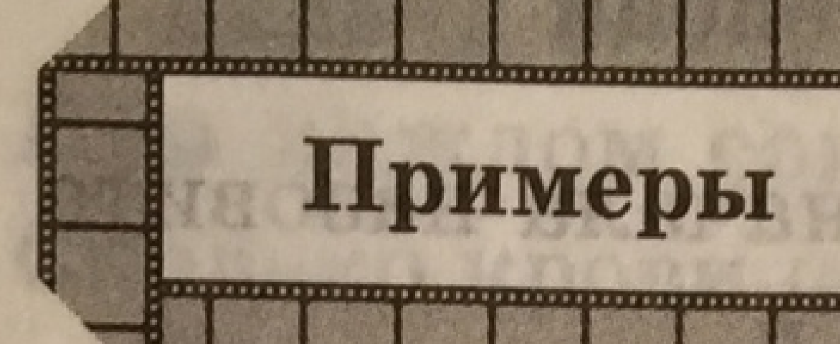
Например, в степени 3^5 замечаем, что $n = 5$, значит, 5 множителей, каждый из которых равен 3

② Умножьте число a само на себя n раз, постепенно умножая по два числа; получите в ответе число, являющееся n-й степенью числа a.

③ Запишите ответ.

Например: $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 9 \cdot 9 \cdot 3 = 81 \cdot 3 = 243$

Замечание. Возведение в степень является действием III ступени, и поэтому при решении примеров на все действия с числами оно выполняется первым.



Вычислите (1—2).

1. $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

2. $10^5 = 100\,000$

$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n}$

$10^n = 10\ldots0$ (n нулей после единицы)

3. Сравните числа 2^3 и 3^2.

Решение.

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

$8 < 9$, поэтому $2^3 < 3^2$

Ответ: $2^3 < 3^2$.

4. Найдите x, если $2^6 \cdot x = 2^7$.

Решение.

$2^6 \cdot x = 2^7$

$64 \cdot x = 128$

$x = 128 : 64$

$x = 2$

$2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$

$2^7 = 64 \times 2 = 128$

$a \times x = b$, откуда $x = b : a$

Ответ: 2.

5. Найдите объем куба, ребро которого $a = 6$ см.

Решение.

$V_{куба} = a^3$

$V_{куба} = 6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 36 \cdot 6 = 216$ (см^3)

Ответ: $V_{куба} = 216$ см^3.

Таблицы квадратов и кубов натуральных чисел

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Полезный совет

Квадраты и кубы чисел, указанных выше, не вычисляйте, а находите в соответствующей таблице и старайтесь запомнить так же, как таблицу умножения. **Эти числа полезно знать наизусть!**

Например: $12^2 - 4^3 = 144 - 64 = 80$

$9^3 - 14^2 = 729 - 196 = 533$

Попробуй не реши!

1. Найдите x, если $2^4 \cdot (x + 2) = 2^5$.

Ответ: 0.

2. Вычислите: а) $(7^3 - 5^3) : (7 - 5)$; б) $16^3 - 12^2 \cdot 4^2$.

Ответ: а) 109; б) 1792.

3. Найдите a, если $a^2 = 9$; $a^2 = 25$; $a^2 = 49$.

Ответ: 3; 5; 7.

Попробуй-ка реши!

Проверьте справедливость равенств:

а) $1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2$

б) $1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2$

в) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$

Проверьте, выполняется ли это свойство для пяти, шести, семи чисел.

Ответ: да.

Деление натуральных чисел

Делением называется действие, посредством которого по данному произведению двух множителей и одному из них отыскивают другой множитель, поэтому *деление* есть действие, обратное умножению.

Например, если $a \cdot x = b$, то $x = b : a$

Разделить число a на число b — значит найти такое число c, которое при умножении на число b дает a, т. е. $a : b = c$, если $c \cdot b = a$.

$$a : b = c$$

делимое делитель частное

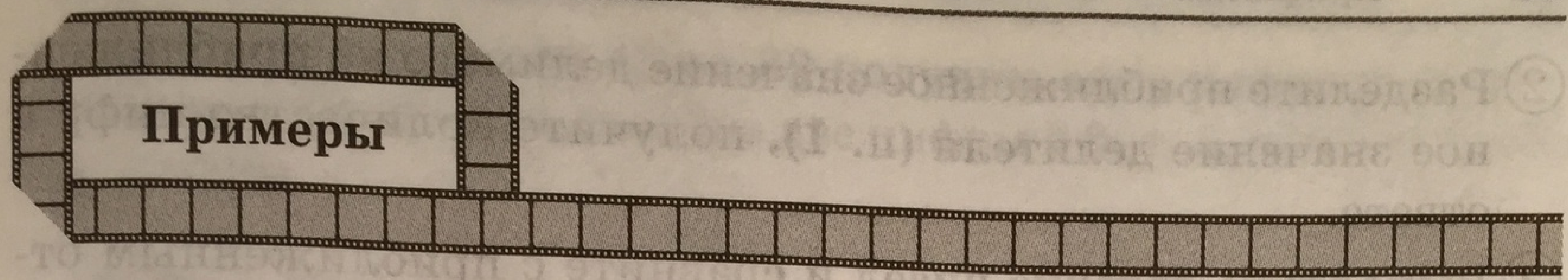
$$a : 1 = a$$

$$0 : a = 0$$

$$a : a = 1$$

$$0 : 1 = 0$$

Если при делении натуральных чисел в ответе получили натуральное число, то деление выполнено нацело (без остатка).



Примеры

1. 125 : 5 = 25, так как 25 · 5 = 125

2. 225 : 15 ≠ 10, так как 10 · 15 = 150 ≠ ≠ 225, значит, 10 не является частным чисел 225 и 15

$a : b = c$, если $c \cdot b = a$

225 : 15 = 15, так как 15 · 15 = 225

3. 80 : 1 = 80 — $a : 1 = a$

4. 324 : 324 = 1 — $a : a = 1$

5. 0 : 18 = 0 — $0 : a = 0$

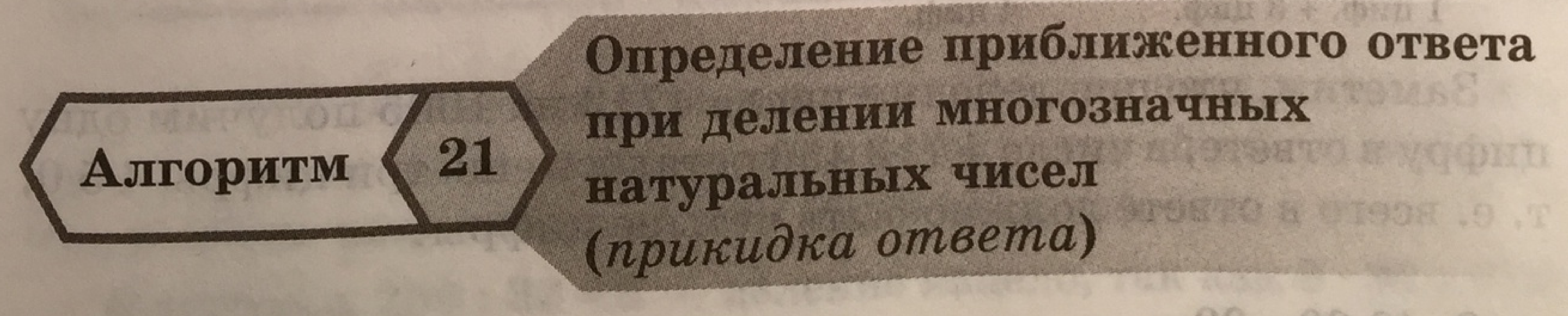
Ни одно натуральное число нельзя делить на нуль, потому что не существует такого единственного числа c, чтобы при умножении его на нуль получилось число, не равное нулю.

Пусть $a : 0 = c$, тогда $c \cdot 0 = a$;

если $a \neq 0$, то равенство $c \cdot 0 = a$ неверное;

если $a = 0$, то $c \cdot 0 = 0$; получим, что c — любое число, а не единственное.

Делить на нуль нельзя!



Алгоритм 21. Определение приближенного ответа при делении многозначных натуральных чисел (*прикидка ответа*)

① Округлите до единиц старшего разряда или разряда, стоящего за ним, делимое и делитель.

② Разделите приближенное значение делимого на приближенное значение делителя (п. 1), получите количество цифр в ответе.

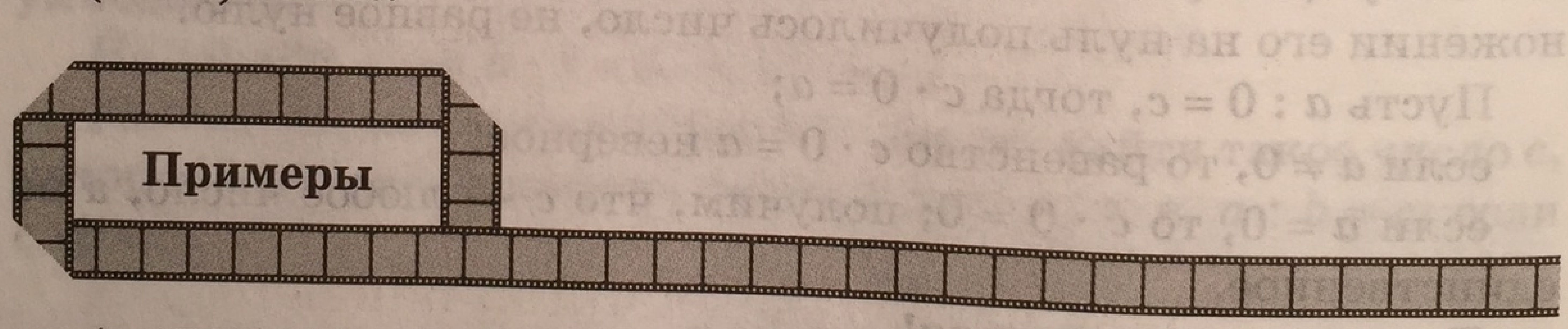
③ Выполните деление чисел и сравните с приближенным ответом, это поможет избежать ошибки в количестве цифр в ответе.

Алгоритм 22 Определение количества цифр в ответе при делении натуральных чисел

① Определите первое неполное делимое (наименьшее число, делящееся на делитель нацело или с остатком). При делении этого делимого на делитель получится одна цифра в ответе (поставьте одну точку в ответе).

② Сосчитайте количество цифр n, стоящих в делимом после первого неполного делимого, поставьте еще n точек в ответе.

③ Количество цифр в ответе равно $n + 1$, в ответе поставили $(n + 1)$ точек.



1. 4713 450 : 1005 = ...

1 циф. + 3 циф. — 4 циф.

Заметим, что при делении числа 4713 на 1005 получим одну цифру в ответе, в числе 4 713 450 осталось еще три цифры 4 5 0, т. е. всего в ответе должно быть четыре цифры.

2. 43 69 : 39 = ...

1 + 2 — 3

При делении числа 43 на 39 получим одну цифру в ответе, при этом в числе осталось еще две цифры 6 9, т. е. всего в ответе три цифры.

3. Сделайте двумя способами прикидку ответа при делении числа 130 410 на 1035.

I *способ* (округление)

130 410 ≈ 130 000; 1035 ≈ 1000; 130 000 : 1000 = 130

II *способ*

130410 : 1035 = ... — в ответе три цифры

(1304 — 1; 10 — 2)

Проверь себя!

Сделайте прикидку ответа и определите количество цифр в нем: а) 12 705 : 121; б) 533 368 000 : 83 600

Ответ: а) ≈ 100, 3 цифры; б) ≈ 6000, 4 цифры.

Деление натуральных чисел нацело и с остатком

Если при делении натурального числа a на натуральное число b получили такое натуральное число c, что $c \cdot b = a$, то говорят, что деление выполнено *нацело* (*без остатка*).

Например, 256 : 32 = 8 — деление нацело, так как 8 · 32 = 256

Если при делении натурального числа a на натуральное число b получается число c и еще остаток r ($r < b$), то говорят,

что деление выполнено *с остатком*, при этом $a = b \cdot c + r$, $0 < r < b$.

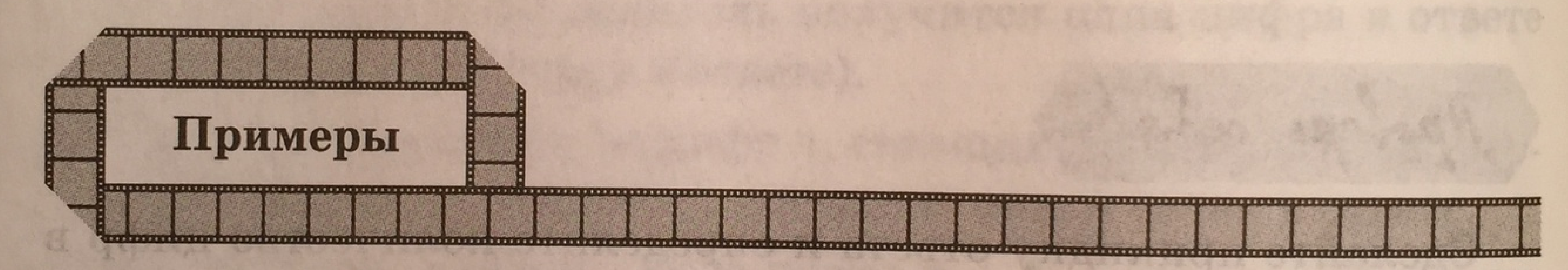
Действие деления с остатком записывается так:

$$a : b = c \text{ (ост. } r)$$

делимое делитель неполное частное остаток

$$a = b \cdot c + r \; (0 \leq r < b)$$

Замечание. Если $r = 0$, то a делится на b нацело.



1. Какой остаток может быть получен в результате деления натурального числа на 6?

Решение.

$r < 6$ (остаток меньше 6)

Ответ: числа 0, 1, 2, 3, 4, 5 могут быть остатком при делении числа на 6.

2. Разделите 48 на 9 (с остатком) и результат проверьте.

Решение.

48 : 9 = 5 (ост. 3) | $a : b = c$ (ост. r), тогда $a = b \cdot c + r$

Проверка:

$5 \cdot 9 + 3 = 45 + 3 = 48$;

получили делимое, значит, ответ верный.

Алгоритм 23. Деление многозначных чисел (с остатком и нацело)

Рассмотрим этот алгоритм на конкретном примере.

① Выполните прикидку ответа при делении данных чисел.

Например, 178360 : 28 = ...

(178 — 1 цифра, 360 — 3 цифры; в ответе 4 цифры)

178 360 ≈ 180 000, 28 ≈ 30, 180 000 : 30 = 6000

② Найдите первое наименьшее неполное делимое и выполните деление. Запишите первую цифру частного в ответе.

Например:

```
_178360 | 28
 168    |------
 ---    | 6...
  10
```

Прикиньте цифру в ответе:
178 ≈ 180; 28 ≈ 30;
180 : 30 = 6

③ Найдите второе неполное делимое, для этого к остатку от деления (10) допишите цифру 3, получите 103; разделите 103 на 28.

```
_178360 | 28
 168    |------
 ---    | 63..
 _103
   84
  ---
   19
```

Прикиньте цифру в ответе:
103 ≈ 100 (90 делится на 3);
28 ≈ 30; 90 : 30 = 3

④ Найдите третье неполное делимое, для этого к остатку 19 допишите цифру 6, разделите 196 на 28.

```
_178360 | 28
 168    |------
 ---    | 6370
 _103
   84
  ---
  _196
   196
   ---
     0
```

Прикиньте цифру в ответе:
196 ≈ 200 (210 делится на 3);
28 ≈ 30; 210 : 30 = 7

(5) Остаток от деления чисел 17 836 и 28 равен 0, значит, деление выполнено нацело, причем в конце делимого есть нуль, который не участвовал в делении, поэтому запишите этот нуль в ответе.

Ответ: 6370.

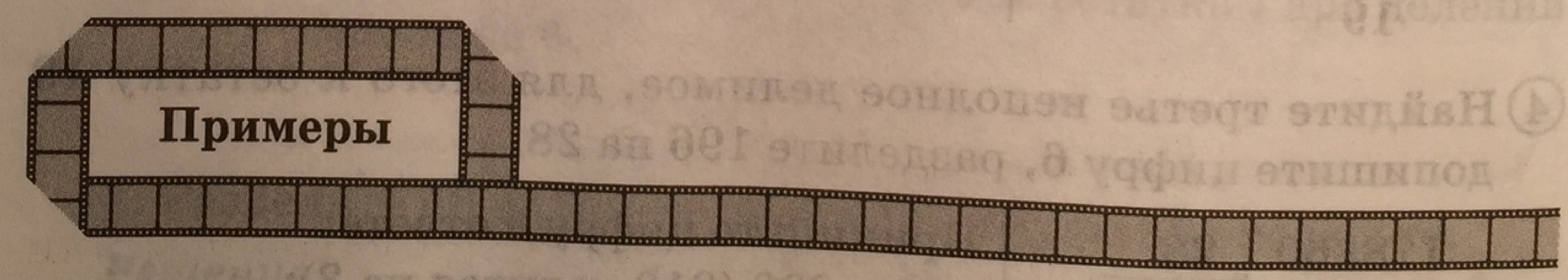
Замечание. Если неполное делимое разделилось нацело, а в заданном делимом остались еще цифры, то припишите одну цифру в неполное делимое и разделите полученное число на делитель. Если число не делится, то в ответе запишите 0, припишите следующую цифру к предыдущей и разделите полученное число на делитель; если оно делится, то выполните деление и запишите в ответе цифру от деления и повторите операцию.

Например, запись деления уголком при вычислении частного 1 206 208 : 401 выглядит так:

```
_1206208 | 401
 1203    |3008
 ----
    32 (не делится)
    320 (не делится)
   _3208
    3208
    ----
       0
```

1206208 : 401 = ...
(1206 — 1; 208 — 3)

1206 ≈ 1200; 401 ≈ 400;
1200 : 400 = 3;
32 не делится на 401;
320 не делится на 401;
3208 ≈ 3200; 3200 : 400 = 8



1. Выполните деление 678 : 86 и сделайте проверку.

Решение.

```
_678 | 86
 602 |7
 ---
  76 (ост.)
```

678 ≈ 700; 86 ≈ 90;
700 : 90 ≈ 7

678 : 86 = 7 (ост. 76)

Проверка:

86 · 7 + 76 = 602 + 76 = 678 — получили делимое, значит, ответ найден верно

Ответ: 7 (ост. 76).

2. Выполните деление 540 : 90.

Решение.

540 : 90 = 6 (ост. 0) — числа разделились нацело

Ответ: 6.

3. Найдите частное 3 039 720 : 584.

```
_3039720 | 584
 2920    |5205
 ----     ....
 _1197
  1168
  ----
   _2920
    2920
    ----
       0
```

I способ

$\underline{3}$ 039 720 ≈ 3 000 000;

$\underline{5}$84 ≈ 600;

3 000 000 : 600 = 5000

II способ

В ответе 4 цифры, так как

$\underbrace{3039}_{1}\ \underbrace{720}_{+\,3}$: 584 = ...

Ответ: 5205.

Полезные советы

1. Проверять результат деления можно умножением или делением:

а) если $a : b = c$ (деление без остатка), то $a = b \cdot c$ или $b = a : c$

б) если $a : b = c$ (ост. r) (деление с остатком), то $a = b \cdot c + r$

2. При делении многозначных чисел в промежуточных действиях используем алгоритм деления с остатком.

Проверь себя!

Выполните деление с остатком:
а) 520 : 65; б) 375 : 40; в) 43 276 : 390

Ответ: а) 8 (ост. 0); б) 9 (ост. 15); в) 110 (ост. 376).

Задачи, решаемые делением натуральных чисел

Делением решаются задачи в таких случаях:

- если даны произведение двух множителей и один из них, то другой множитель находите делением:

$$\text{если } a \cdot x = c, \text{ то } x = c : a$$

- если известно большее число и во сколько раз оно больше другого, то меньшее число находится делением:

$$\text{если } a > b \text{ в } n \text{ раз, то } b = a : n$$

- если известны два различных числа и надо узнать, во сколько раз одно число больше другого, то выполните деление:

$$\text{если } a > b \text{ в } n \text{ раз, то } a : b = n$$

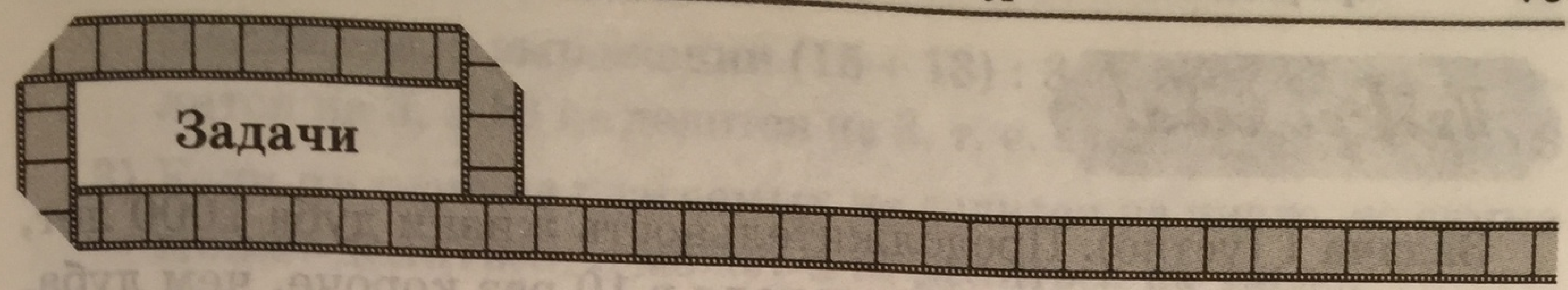
- если известно, что число разделили на n равных частей и надо найти одну такую часть, то $a : n = c$

$$\text{если } a > b \text{ в } n \text{ раз, то } b < a \text{ в } n \text{ раз и } b = a : n$$

Замечания

1. Все задачи на деление решаются по общей формуле $a : b = c$, если $a > b$ и a делится на b нацело.

2. При решении задач на деление пользуйтесь алгоритмом 14.



1. В коробке 260 пуговиц. На каждое платье идет 5 пуговиц. На сколько платьев хватит коробки пуговиц?

Дано:

коробка	$b = 260$ пуговиц	$b > a$
платье	$a = 5$ пуговиц	

Найти количество платьев.

Решение.

Общая формула решения: $b : a = c$

$260 : 5 = 52$ (платья)

Ответ: коробки пуговиц хватит на 52 платья.

2. Масса чугунной болванки 16 кг. Сколько таких болванок потребуется для отливки 41 детали, каждая из которых имеет массу 12 кг? Сколько чугуна останется?

Дано:

болванка	$a = 16$ кг	n
деталь	$b = 12$ кг	$c = 41$ деталь

Найти: 1) число болванок, необходимое для отливки;
2) количество килограммов оставшегося чугуна.

Решение.

Общая формула решения: $n = bc : a$

1) $bc = 12 \cdot 41 = 41 \cdot (10 + 2) = 410 + 82 = 492$ (кг) — вес всех деталей

2) $n = 492 : 16 = 30$ (ост. 12) — получится из чугуна 30 болванок и еще останется 12 кг

$$\begin{array}{r|l} 492 & 16 \\ \underline{48} & 30 \\ 12 & \text{(ост.)} \end{array}$$

Ответ: потребуется 30 болванок; останется 12 кг чугуна.

Проверь себя!

Задача 1 (устно). Продолжительность жизни дуба 1000 лет, а продолжительность жизни тополя в 10 раз короче, чем дуба. Сколько лет живет тополь?

Ответ: тополь живет 100 лет.

Задача 2 (устно). Одному ученику нужно было разделить число на 64, а другому то же число разделить на число, в 4 раза меньшее. Первый получил в частном 24. Какое число получил второй ученик?

Ответ: 96.

Задача 3. Одно колесо делает 4620 оборотов за 77 мин, а другое — 1080 оборотов за 54 мин. Какое колесо делает большее число оборотов за 1 мин и во сколько раз?

Замечание. Количество оборотов в минуту — это скорость вращения.

Ответ: I колесо делает оборотов в 1 мин в 3 раза больше, чем II колесо.

Алгоритм 24 Делимость суммы двух натуральных чисел на натуральное число

$$(a + b) : c = a : c + b : c$$

Разделите каждое слагаемое на число.

1) Если оба слагаемых делятся на число, то и сумма разделится на это число.

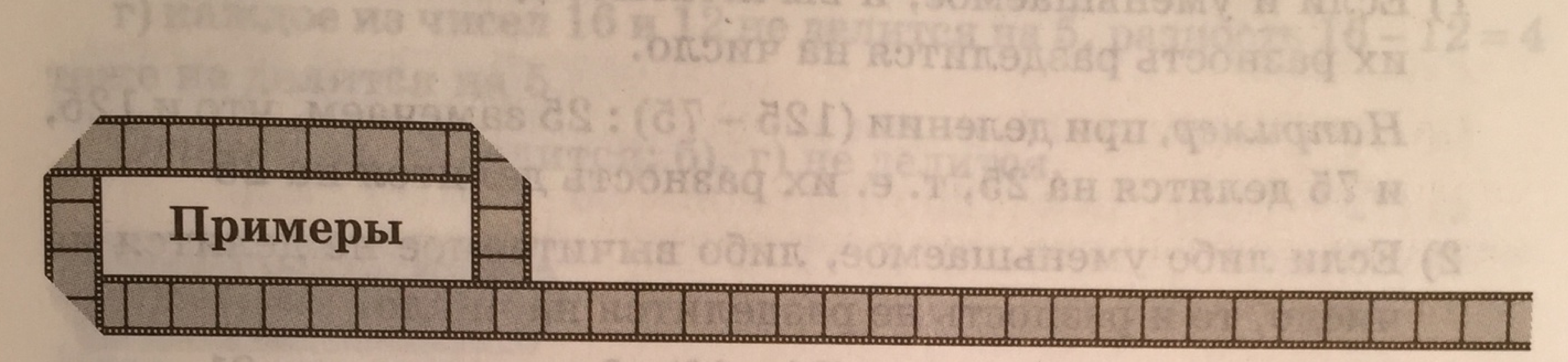
   Например, при делении $(27 + 36) : 9$ замечаем, что 27 делится на 9 и 36 делится на 9, значит, их сумма делится на 9

2) Если лишь одно из слагаемых не делится на число, то и сумма не делится на число.

Например, в выражении (15 + 13) : 3 замечаем, что 15 делится на 3, а 13 не делится на 3, т. е. сумма не делится на 3

3) Если ни одно из слагаемых не делится на число, то сумма может делиться, а может и не делиться на число.

Например, сумма 14 + 10 делится на 3, хотя ни 14, ни 10 не делятся на 3



1. Установите, делится ли сумма чисел:

а) 1400 + 28 на число 7

б) 24 + 49 на число 6

Решение.

а) 1400 + 28 делится на число 7, так как и число 1400, и число 28 делятся на 7

б) 24 + 49 не делится на 6, так как 24 делится, а 49 не делится на 6

2. Делится ли 1836 на 18?

Решение.

1836 = 1800 + 36

Каждое слагаемое (1800 и 36) делится на 18

Ответ: 1836 делится на 18.

Проверь себя!

Разделится ли на 3 сумма: а) 125 + 30; б) 6 + 45?

Ответ: а) нет; б) да.

Алгоритм 25 Делимость разности натуральных чисел на натуральное число

$$(a - b) : c = a : c - b : c$$

Разделите вычитаемое и уменьшаемое на число.

1) Если и уменьшаемое, и вычитаемое делятся на число, то их разность разделится на число.

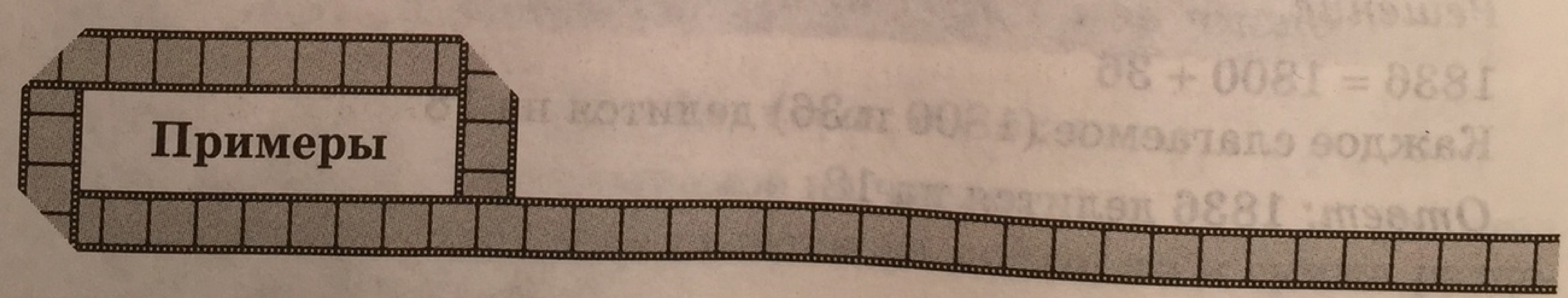
   Например, при делении (125 – 75) : 25 замечаем, что и 125, и 75 делятся на 25, т. е. их разность делится на 25

2) Если либо уменьшаемое, либо вычитаемое не делится на число, то и разность не разделится на число.

   Например, в выражении (21 – 10) : 3 замечаем, что 21 делится, а 10 не делится на 3, поэтому разность не делится на 3

3) Если и уменьшаемое, и вычитаемое не делятся на число, то разность чисел может делиться, а может и не делиться на число.

   Например, разность 20 – 5 делится на 3, хотя ни уменьшаемое, ни вычитаемое не делится нацело на 3 (но 20 – 5 = 15; 15 делится на 3, т. е. разность делится на 3); разность 18 – 5 не делится на 4, в ней ни уменьшаемое, ни вычитаемое не делится нацело на 4



Установите, делится ли разность двух чисел:

а) 220 – 33 на число 11

б) 150 – 44 на число 15

в) 125 – 25 на число 4

г) 16 – 12 на число 5

Решение.

а) 220 – 33 делится на 11, так как и 220, и 33 делятся на 11

б) 150 – 44 не делится на 15, так как 150 делится, а 44 не делится на 15

в) каждое из чисел 125 и 25 не делится на 4, однако их разность 125 – 25 = 100 делится на 4

г) каждое из чисел 16 и 12 не делится на 5, разность 16 – 12 = 4 тоже не делится на 5

Ответ: а), в) делится; б), г) не делится.

Проверь себя!

Выполните действия, применяя свойства деления:

а) (1830 + 2160) : 30 б) (287 – 153) : 7

Ответ: а) 133; б) не делится.

Алгоритм 26 Делимость произведения натуральных чисел на натуральное число

$$(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b = a \cdot (b : c)$$

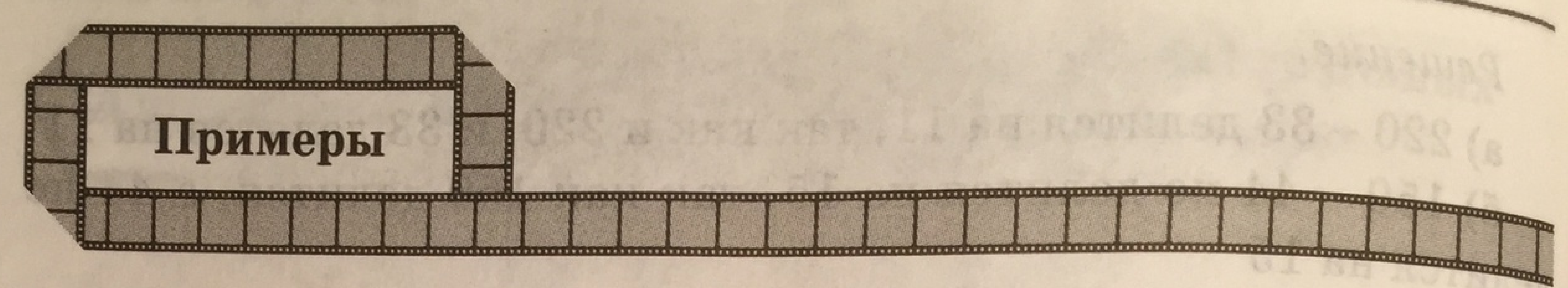
Проверьте, делится ли хотя бы один из данных множителей на число.

① Если один из множителей делится на это число, то найдите частное от деления и умножьте остальные множители на полученное частное.

Например, (8 · 15) : 3 = 8 · (15 : 3) = 8 · 5 = 40

② Если ни один из множителей не делится на число, то произведение может делиться, а может и не делиться на это число.

Например, произведение 5 · 4 делится на 10, хотя ни 5, ни 4 не делится на 10; произведение 6 · 9 не делится на 5, и ни один множитель не делится на 5.



Выполните деление произведения на число:

а) $(720 \cdot 308) : 18$ б) $(30 \cdot 302 \cdot 11) : 33$

Решение.

$(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b = a \cdot (b : c)$

а) $(720 \cdot 308) : 18 = (720 : 18) \cdot 308 = 40 \cdot 308 = 12\,320$

б) $(30 \cdot 302 \cdot 11) : 33 = (3 \cdot 10 \cdot 302 \cdot 11) : 33 = (33 \cdot 10 \cdot 302) : 33 =$
$= (33 : 33) \cdot (302 \cdot 10) = 1 \cdot 3020 = 3020$

Ответ: а) 12 320; б) 3020.

Проверь себя!

1. Делится ли произведение чисел 75 и 72 на число 15?

Ответ: да.

2. Разделите произведение $18 \cdot 15 \cdot 20$ на число 25, используя свойства деления.

Ответ: 216.

Попробуй не реши!

1. Вычислите, используя свойства деления:

а) $(405 + 1250 - 65) : 5$

б) $(720 \cdot 810 \cdot 180) : 72$

Ответ: а) 318; б) 1 458 000.

2. Даны числа 56 848 и 272.

а) Найдите частное $56\,848 : 272$.

б) Уменьшите делимое и делитель в 8 раз и найдите частное.

в) Увеличьте делимое и делитель в 3 раза и найдите частное. Сравните полученные ответы.

Ответ: а) 209; б) 209; в) 209.

Попробуй-ка реши!

Найдите три числа, сумма которых равна 777, если второе число в 2 раза больше первого, а третье — в 4 раза больше первого.

Ответ: 111; 222; 444.

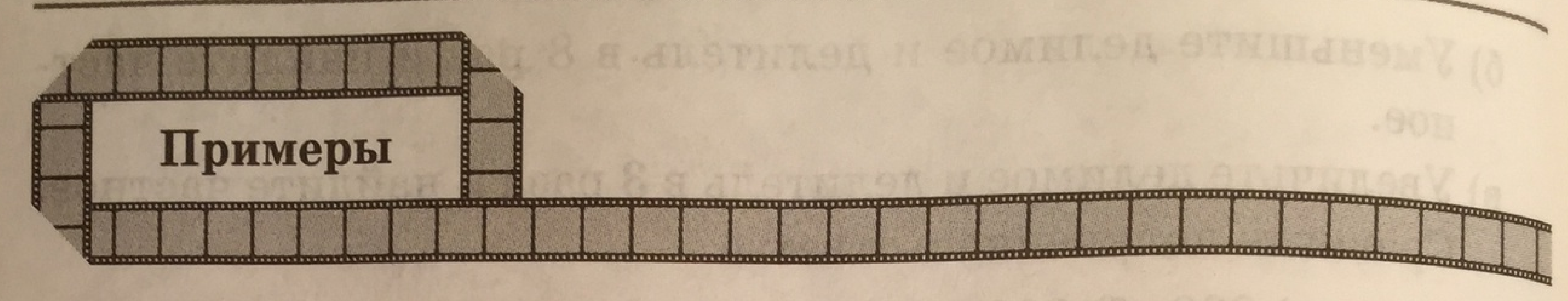
Алгоритм 27 Порядок выполнения действий при вычислении значения числового выражения

① Если в числовом выражении нет скобок и есть только действия I ступени (сложение и вычитание) или только действия II ступени (умножение и деление), то выполняйте действия в порядке их записи (если нельзя применить законы, упрощающие вычисления).

② Если выражение без скобок содержит действия разных ступеней, то сначала выполните действия III ступени (возведение в степень), потом (по порядку их записи) действия II ступени, а затем (по порядку записи) действия I ступени.

③ Если в выражении есть скобки, то сначала выполните действия в скобках, а затем остальные действия.

④ Запишите ответ.



Найдите значения выражений (1—2).

1. $\overset{1}{4713450 :} 1005 \overset{4}{+} 4368 \overset{2}{:} 39 \overset{3}{\cdot} 56$

Решение.

1) 4713450 : 1005 = 4690

```
_4713450 | 1005
 4020    | 4690
 _6934
  6030
  _9045
   9045
      0
```

4713450 ≈ 5000000;
1005 ≈ 1000;
5000000 : 1000 = 5000;
$\underbrace{4713}_{1} \underset{+}{\,} \underbrace{450}_{3} : 1005 = \underbrace{....}_{4}$

2) 4368 : 39 = 112

```
_4368 | 39
 39   | 112
 _46
  39
  _78
   78
    0
```

43 68 : 39 = ...
(1 + 2 → 3)

3) 112 · 56 = 6272

```
 ×112
   56
  672
+560
 6272
```

112 ≈ 100;
56 ≈ 60;
100 · 60 = 6000

6272 ≈ 6000

4) $4690 + 6272 = 10\,962$

$$\begin{array}{r} +\ 4690 \\ 6272 \\ \hline 10962 \end{array}$$

Ответ: 10 962.

5 7 3 6 1 2 8 4

2. $16\,250 : 50 + 3^2 \cdot (7^2 - 48) - 5^2 = 309$

Замечание. Можно решать пример в цепочку, постепенно выполняя действия сначала III ступени, затем II ступени и I ступени по порядку, переписывая весь пример.

Решение.

$16\,250 : 50 + 3^2 \cdot (7^2 - 48) - 5^2 =$
$= 16\,250 : 50 + 9 \cdot (49 - 48) - 25 =$
$= 325 + 9 \cdot 1 - 25 = (325 - 25) + 9 =$
$= 300 + 9 = 309$

$(a + b) - c = (a - c) + b$

Ответ: 309.

3. Выполните действия $368 : 8 = 320 : 8 + a : 8$ и найдите a.

Решение.

$368 : 8 = (320 + 48) : 8 =$
$= 320 : 8 + 48 : 8$

$320 : 8 + 48 : 8 = 320 : 8 +$
$+ a : 8$, откуда $a = 48$

$368 = 320 + 48$
$(a + b) : c = a : c + b : c$

Ответ: $a = 48$.

Замечание. Можно было сначала выполнить деление $368 : 8$ и $320 : 8$, а затем найти a.

Проверь себя!

Выполните действия в цепочку:

$$(16 - 4)^2 : 144 + (11 + 2)^2 : 169 + (12 + 13)^2 : 625$$

Ответ: 3.

Попробуй не реши!

1. Найдите значение выражения

$$349\,044 : 2006 + 9504 - 7\,403\,670 : 765$$

Ответ: 0.

2. Применяя свойства умножения, вычислите:

$$276 \cdot 35 - 276 + 9 \cdot 276$$

Ответ: 11 868.

3. Одно число в 5 раз меньше другого, а их разность равна 84. Найдите эти числа.

Ответ: 21 и 105.

Попробуй-ка реши!

1. Ширина прямоугольника 44 см. На сколько уменьшится его площадь, если длину уменьшить на 5 см?

Ответ: 220 кв. см.

2. Сколькими нулями оканчивается произведение всех натуральных чисел от 1 до 25?

Ответ: шестью нулями.

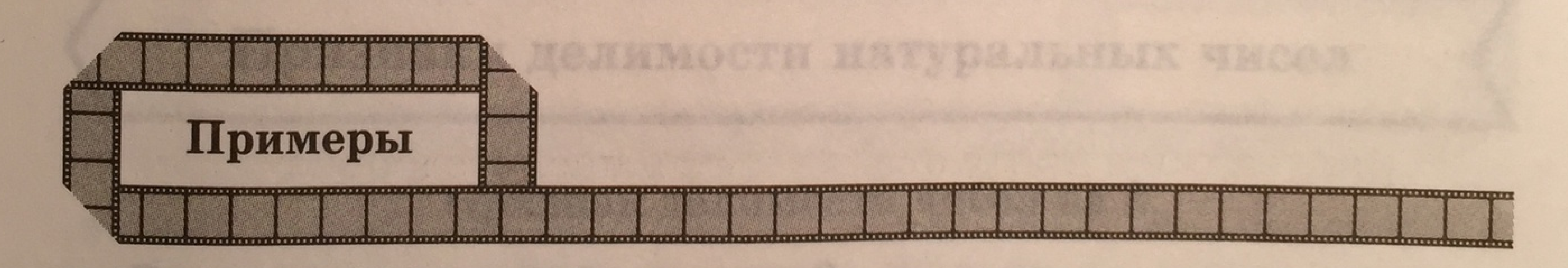
Алгоритм 28 Чтение числовых и буквенных выражений

① Если выражение содержит только одно действие (между числами или буквами), то называйте выражение по знаку этого действия: сумма (+); разность (–); произведение (·); частное (:).

Например, $a + 2$ — сумма чисел a и 2; $3 \cdot 8$ — произведение чисел 3 и 8; $5x$ — произведение чисел 5 и x; $b : 5$ — частное чисел b и 5; $a - b$ — разность чисел a и b.
Далее проиллюстрируем алгоритм на примере выражения $2 : x - 5$.

② Если выражение содержит несколько знаков действий, то: 1) установите порядок действий (деление, вычитание); 2) назовите последнее действие (в выражении $2 : x - 5$ это разность выражения $2 : x$ и числа 5); 3) назовите действие (в выражении $2 : x$ это частное чисел 2 и x); 4) прочитайте все выражение $2 : x - 5$ так: разность частного чисел 2 и x и числа 5.

Замечание. Если в заданном выражении есть еще действия, то продолжайте читать до тех пор, пока не закончите читать выражение.



Прочитайте выражения **(1—3)**.

1. $5 : x + 2y$ | Последнее действие — сложение

Ответ: сумма частного чисел 5 и x и произведения чисел 2 и y.

2. $15a - 6b$ | Последнее действие — вычитание

Ответ: разность произведений чисел 15 и a и чисел 6 и b.

$$3.\ 80 \overset{4}{+} 16 \overset{3}{\cdot} (a \overset{1}{:} 5 \overset{2}{-} 15)$$ | Последнее действие — сложение

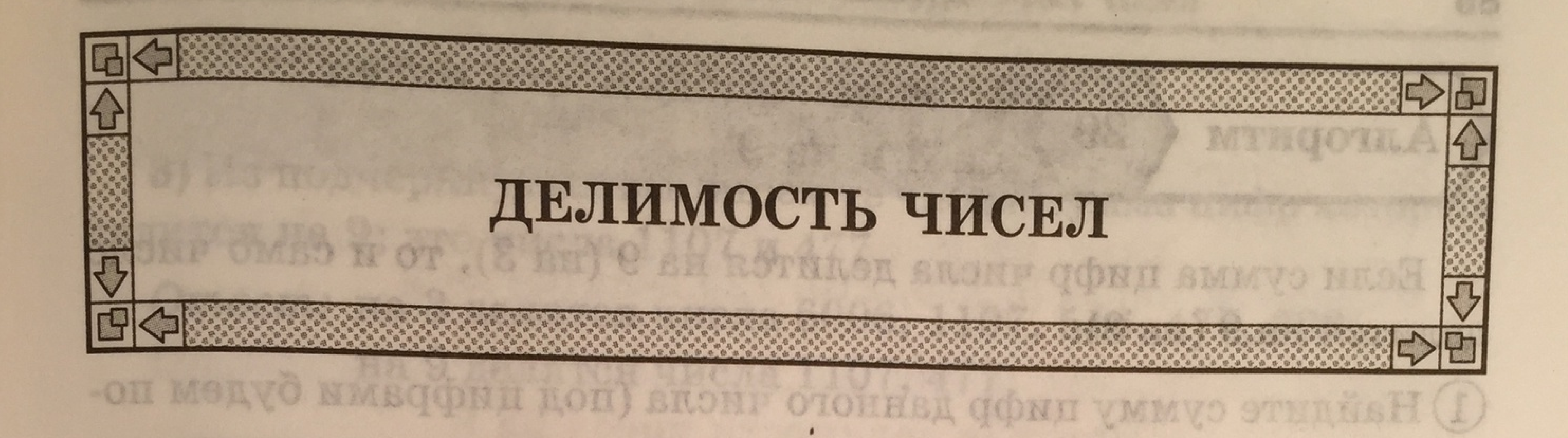
Ответ: сумма числа 80 и произведения числа 16 на разность частного чисел a и 5 и числа 15.

Проверь себя!

Прочитайте выражение:

а) $b + 7$ б) $6a - 9$ в) $3a + 6$ г) $12 \cdot (a + 3) - 8$

Ответ: а) сумма чисел b и 7;
б) разность произведения чисел 6 и a и числа 9;
в) сумма произведения чисел 3 и a и числа 6;
г) разность произведения числа 12 на сумму чисел a и 3 и числа 8.



ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ

При выполнении деления двух натуральных чисел, а также при разложении чисел на простые множители полезно знать признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 25.

Четные и нечетные числа

Четными называются числа, которые оканчиваются одной из цифр: **0, 2, 4, 6, 8.**

Нечетными называются числа, которые оканчиваются одной из цифр: **1, 3, 5, 7, 9.**

$\mathbf{2 \cdot n}$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ — формула **четных** чисел

$\mathbf{2 \cdot n - 1}$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ — формула **нечетных** чисел

Признаки делимости натуральных чисел

Признак делимости чисел на 2

Все четные числа делятся на 2.

Например, числа 10, 124, 326, 818 делятся на 2 (10 : 2 = 5; 124 : 2 = 62; 326 : 2 = 163; 818 : 2 = 409)

Проверь себя!

Выберите из чисел 26, 27, 28, 30, 32, 41 те, которые делятся на 2.

Ответ: 26, 28, 30, 32.

Алгоритм 29 Признаки делимости чисел на 3 и на 9

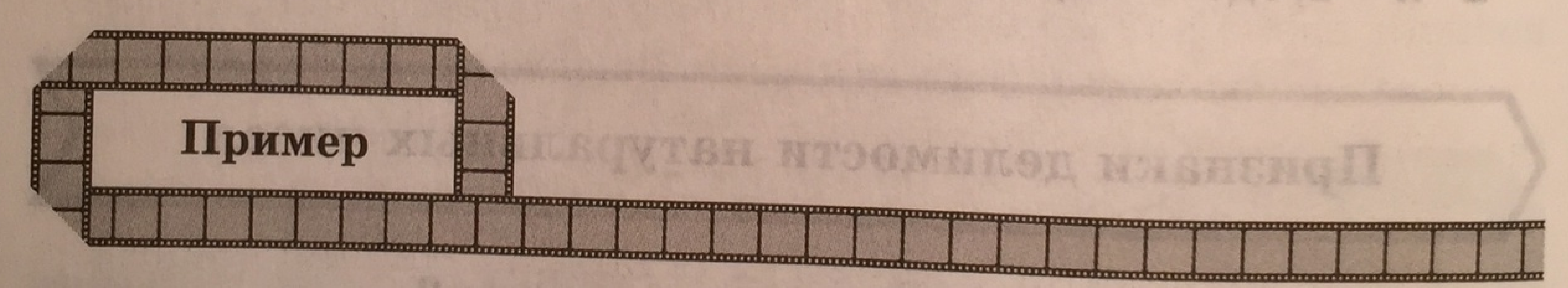
Если сумма цифр числа делится на 9 (на 3), то и само число делится на 9 (на 3).

① Найдите сумму цифр данного числа (под цифрами будем понимать числа).

② Разделите полученную сумму на 3 (на 9). Если деление выполнено без остатка, то число делится на 3 (на 9). Если деление с остатком, то число не делится на 3 (на 9).

Замечание. Если число делится на 9, то оно подавно разделится на 3.

Например:
число 123 делится на 3, так как 1 + 2 + 3 = 6
число 252 делится на 9, так как 2 + 5 + 2 = 9
число 172 не делится ни на 3, ни на 9, так как 1 + 7 + 2 = 10 (сумма цифр не делится ни на 3, ни на 9)



Из чисел 516, 6006, 124, 477, 413, 303, 1107 выпишите те, которые: а) делятся на 3; б) делятся на 9. Запишите в каждом случае числа в порядке убывания.

Решение.

1) Найдем сумму цифр каждого числа и подчеркнем те суммы, которые делятся на 3:

5 + 1 + 6 = <u>12</u>
1 + 2 + 4 = 7
4 + 1 + 3 = 8
1 + 1 + 0 + 7 = <u>9</u>

6 + 0 + 0 + 6 = <u>12</u>
4 + 7 + 7 = <u>18</u>
3 + 0 + 3 = <u>6</u>

2) Запишем эти числа в порядке убывания:

6006, 1107, 516, 477, 303

3) Из подчеркнутых выпишем те числа, сумма цифр которых делится на 9; это числа 1107 и 477.

Ответ: на 3 делятся числа 6006, 1107, 516, 477, 303; на 9 делятся числа 1107, 477.

Проверь себя!

Какие из чисел 179, 525, 718, 216, 111, 69, 225 делятся: а) на 3; б) на 9; в) на 3 и на 9?

Ответ: а) 525, 216, 111, 69, 225; б) 225, 216; в) 225, 216.

Внимание! Далее рассмотрим несколько признаков делимости и примеры. Алгоритм устно сформулируйте сами.

Признаки делимости чисел на 4 и на 25

Если две последние цифры числа — нули или составляют число, которое делится на 4 (на 25), то само число делится на 4 (на 25).

Например:

число 2000 делится на 25 и на 4, так как в конце числа два нуля

число 128 делится на 4, так как 28 делится на 4

число 225 делится на 25, так как 25 делится на 25

Проверь себя!

Из чисел 625, 512, 415, 316, 400, 218, 736, 175, 900 выпишите все те, которые делятся: а) на 25; б) на 4; в) и на 4, и на 25.

Ответ: а) 625, 400, 175, 900; б) 512, 316, 400, 736, 900; в) 400, 900.

Признак делимости чисел на 5

Если число оканчивается цифрой 0 или цифрой 5, то оно делится на 5.

Например, числа 5, 115, 210, 725 делятся на 5

Признак делимости чисел на 6

Если число четное и делится на 3, то оно делится на 6.

Например, числа 6, 12, 18, 24, 36, 144, 528 четные и сумма цифр каждого делится на 3, значит, каждое число делится на 6

Проверь себя!

Из чисел 6, 18, 138, 214, 382, 412, 516 выпишите те, которые делятся на 6.

Ответ: 6, 18, 138, 516.

Признак делимости чисел на 10

Если число оканчивается цифрой 0, то оно делится на 10.

Например, числа 10, 100, 250, 480 делятся на 10

Признаки делимости чисел на 8 и на 125

Если три последние цифры числа — нули или составляют число, которое делится на 8 (на 125), то само число делится на 8 (на 125).

Например:

число 1000 делится и на 8, и на 125

число 12 000 делится и на 8, и на 125

число 5168 делится на 8, так как 168 : 8 = 21

число 10 375 делится на 125, так как 375 : 125 = 3

Проверь себя!

Из чисел 2128, 5216, 9750, 1500, 2080, 2486, 25 000 выпишите те, которые делятся на: а) 8; б) 125.

Ответ: а) 2128, 5216, 2080, 25 000; б) 9750, 1500, 25 000.

Признаки делимости чисел, бо́льших 1000, на 7, 11, 13

Если разность между числом, выраженным тремя последними цифрами данного числа, и числом, выраженным остальными его цифрами, делится на 7 (на 11, на 13), то и само число делится на 7 (на 11, на 13).

Например:

число 17 738 делится на 7, так как 738 – 17 = 721, а число 721 делится на 7

число 1452 делится на 11, так как 452 – 1 = 451, а число 451 делится на 11

число 1638 делится на 13, так как 638 – 1 = 637, а число 637 делится на 13

Полезно знать!

Числа вида 135 135, 410 410, 715 715, ... (с повторяющейся тройкой цифр) делятся на произведение чисел 7 · 11 · 13, так как 7 · 11 · 13 = 1001 и при умножении любого трехзначного числа на 1001 получается шестизначное число с повторяющейся тройкой цифр.

Например:

135 · 1001 = 135 · (1000 + 1) = 135 000 + 135 = 135 135

Проверьте на любом примере.

Проверь себя!

Проверьте, делится ли нацело число:

а) 2065 на 7
б) 2717 на 11
в) 1079 на 13

Ответ: а) да; б) да; в) да.

Разложение натуральных чисел на простые множители

Натуральное число, которое больше единицы и делится только на 1 и само на себя, называется *простым*.

Например: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... — простые числа

Число, которое делится на себя, на 1 и еще на какое-либо число (т. е. имеет более двух делителей), называется *составным*.

Например: 4, 6, 8, 9, 12, 14, ... — составные числа. Каждое из них делится на 1, на себя и имеет другие делители (число 4 делится на 1, 2, 4; число 6 делится на 1, 2, 3, 6 и т. д.)

Число 1 не является ни простым, ни составным.

Два или несколько чисел, у которых единственный общий делитель, равный 1, называются *взаимно простыми числами*.

Например: 12 и 13; 10 и 11; 2 и 5; 15 и 19 — взаимно простые числа

Разложить натуральное число *на простые множители* — значит записать это число в виде произведения простых чисел.

Алгоритм 30 Разложение натуральных чисел (без нулей на конце) на простые множители

① С помощью признаков делимости найдите наименьший простой делитель данного числа, представьте число в виде произведения этого наименьшего делителя и частного от деления данного числа на это простое число.

Например:

$28 = 2 \cdot 14$ | $28 : 2 = 14$

② Если второй множитель — составное число, то повторите действие (п. 1) относительно этого множителя.

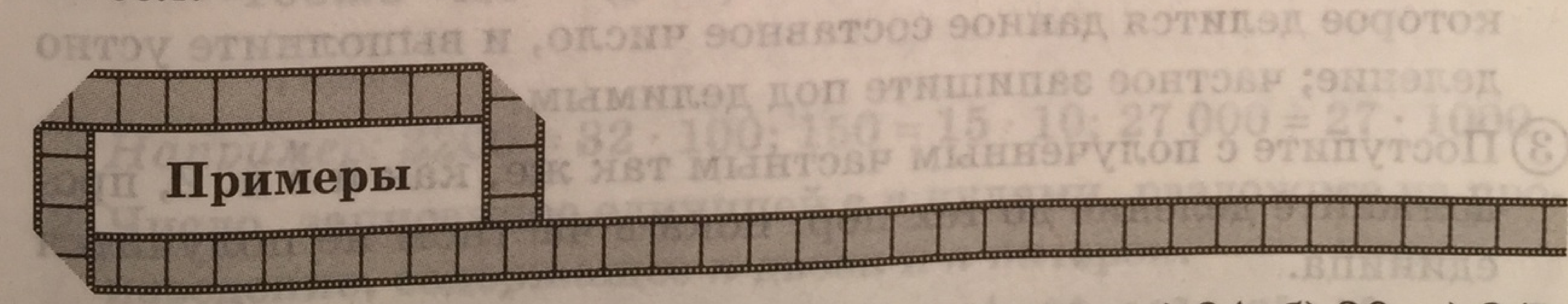
Например, в данном примере

$28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$ | $14 = 2 \cdot 7$

③ Если снова получите составное число, то повторяйте действие п. 1 до тех пор, пока все множители не станут простыми числами.

④ Запишите данное число в виде произведения простых чисел, получите разложение числа на простые множители (среди них могут быть равные).

⑤ Ответ запишите в виде произведения степеней простых чисел.



Разложите на простые множители число: а) 24; б) 36; в) 84.

Решение.

а) $24 = 2 \cdot 12 = 2 \cdot 2 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$

б) $36 = 2 \cdot 18 = 2 \cdot 2 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$

в) $84 = 2 \cdot 42 = 2 \cdot 2 \cdot 21 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$

Замечание. Можно число сначала представить в виде произведения двух (необязательно простых) множителей, а затем каждый из них разложить на простые множители.

Например: $54 = 6 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^3$

$225 = 15 \cdot 15 = 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5^2$ (или $225 = 25 \cdot 9$)

Проверь себя!

Разложите на простые множители число: а) 124; б) 175; в) 153.

Ответ: а) $2^2 \cdot 31$; б) $5^2 \cdot 7$; в) $3^2 \cdot 17$.

Можно разложить числа на простые множители иначе (с помощью вертикальной черты).

Алгоритм 31 Разложение чисел на простые множители с помощью вертикальной черты

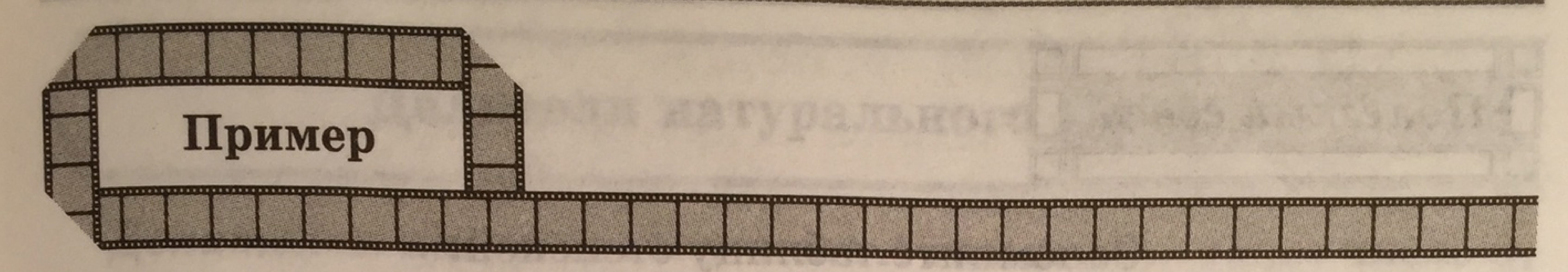
① Запишите данное составное число и проведите справа от него вертикальную черту.

② Справа от черты запишите наименьшее простое число, на которое делится данное составное число, и выполните устно деление; частное запишите под делимым.

③ Поступите с полученным частным так же, как и в п. 2, продолжайте деление до тех пор, пока в частном не получится единица.

④ Запишите в виде произведения все простые числа, стоящие справа от черты; получите разложение данного числа на простые множители.

⑤ Ответ запишите в виде произведения степеней простых множителей.



Разложите на простые множители числа 12; 39; 54; 124.

Решение.

12	2
6	2
3	3
1	

39	3
13	13
1	

54	2
27	3
9	3
3	3
1	

124	2
62	2
31	31
1	

Ответ: $12 = 2^2 \cdot 3$; $39 = 3 \cdot 13$; $54 = 2 \cdot 3^3$; $124 = 2^2 \cdot 31$.

Алгоритм 32. Разложение натуральных чисел, оканчивающихся нулями, на простые множители

① Если данное число оканчивается нулями, то сначала запишите его в виде произведения двух чисел, одно из которых единица с нулями, а другое равно оставшейся без нулей части числа.

$$\underbrace{100...0}_{n \text{ нулей}} = 10^n = (2 \cdot 5)^n = 2^n \cdot 5^n, \text{ так как } 10 = 2 \cdot 5$$

Например: $3200 = 32 \cdot 100$; $150 = 15 \cdot 10$; $27\,000 = 27 \cdot 1000$

② Число, записанное единицей с n нулями, разложите на произведение, содержащее n двоек и n пятерок.

Например: $1000 = 2^3 \cdot 5^3$; $10\,000 = 2^4 \cdot 5^4$; $10^n = 2^n \cdot 5^n$

③ Оставшуюся часть числа (без нулей) разложите на простые множители (по признакам делимости на 2, 3, 5, ...).

④ Запишите произведение полученных выше множителей (п. 2 и 3).

Полезный совет

Запомните таблицу степеней:

$2^1 = 2$	$2^6 = 64$	$3^1 = 3$	$5^1 = 5$
$2^2 = 4$	$2^7 = 128$	$3^2 = 9$	$5^2 = 25$
$2^3 = 8$	$2^8 = 256$	$3^3 = 27$	$5^3 = 125$
$2^4 = 16$	$2^9 = 512$	$3^4 = 81$	$5^4 = 625$
$2^5 = 32$	$2^{10} = 1024$	$3^5 = 243$	$5^5 = 3125$

При разложении числа на простые множители посмотрите, нет ли его в таблице, и если оно есть, то запишите это число сразу в виде степени.

Например: $16 = 2^4$; $81 = 3^4$; $125 = 5^3$; $128 = 2^7$; $243 = 3^5$; $625 = 5^4$ и т. д.

Пример

Разложите на простые множители число: а) 7200; б) 6250.

Решение.

а) $7200 = 72 \cdot 100 = 72 \cdot 10^2 = 8 \cdot 9 \cdot 10^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

б) $6250 = 625 \cdot 10 = 5^4 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 5^5$

$625 = 5^4$ (по таблице)

Проверь себя!

Разложите на простые множители числа 210, 2700, 48, 1250, 400, 9800.

Ответ: $210 = 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5$; $2700 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$; $48 = 2^4 \cdot 3$; $1250 = 2 \cdot 5^4$; $400 = 2^4 \cdot 5^2$; $9800 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$.

Делители натурального числа

Делителем натурального числа A называется такое число n, **на которое** число A делится без остатка.

Например, числа 1, 2, 3, 4, 6, 12 — делители числа 12; делители числа 18 — это числа 1, 2, 3, 6, 9, 18; делители числа 30 — это числа 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.

Наибольшим делителем натурального числа является само число.

Например, наибольшим делителем числа 12 является число 12.

Общим делителем нескольких чисел называется число, **на которое** делится каждое из данных чисел.

Например, для чисел 12, 24 и 36 общими делителями будут числа 1, 2, 3, 4, 6, 12; для чисел 18 и 15 общими делителями будут числа 1 и 3.

Если общим делителем чисел является только число 1, то такие числа называются *взаимно простыми*.

Например, числа 9 и 10; 7 и 15; 2 и 3 — взаимно простые числа (у них один общий делитель, равный 1).

Наибольшим общим делителем (НОД) двух или нескольких чисел называется наибольший из всех общих делителей данных чисел.

Например, наибольший общий делитель чисел 12 и 18 — число 6. Записывают это так: НОД(12; 18) = 6.

Алгоритм 33. Нахождение наибольшего общего делителя (НОД) нескольких натуральных чисел (I способ)

① Проверьте, делится ли каждое из данных чисел на меньшее; если делится, то меньшее из чисел и есть наибольший общий делитель данных чисел (НОД).

Например: НОД(10; 5) = 5; НОД(36; 12; 4) = 4

Если одно число не делится на другое, то переходите к п. 2.

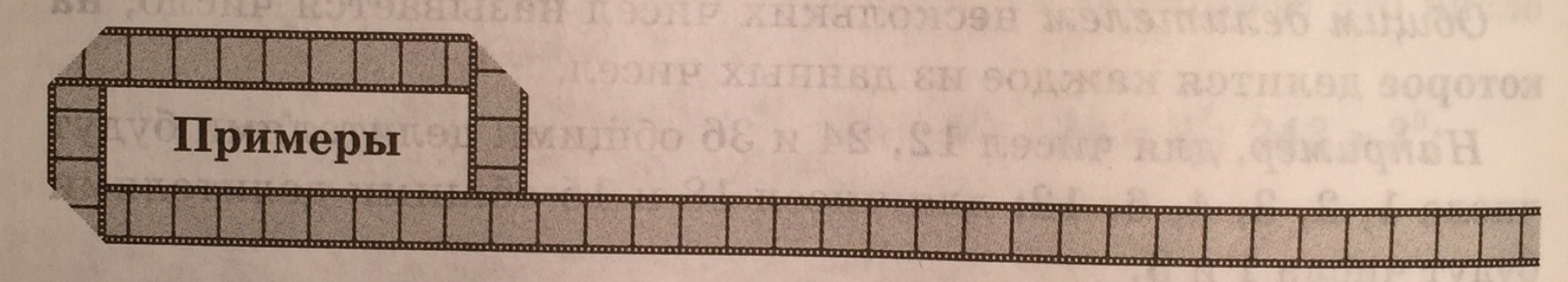
② Разложите каждое число на простые множители.

③ Подчеркните общие множители во всех числах.

④ Вычислите произведение всех общих множителей, это и будет наибольший общий делитель (НОД).

Например: НОД(12; 16) = 4, так как $12 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 3$ и $16 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 2 \cdot 2$

Замечание. Если числа a и b взаимно простые, то НОД(a; b) = 1.
Например: НОД(9; 10) = 1



НОД(125; 25) = 25	125 : 25 = 5
НОД(12; 18) = 2 · 3 = 6	$12 = \underline{2} \cdot 2 \cdot \underline{3}$; $18 = \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot 3$
НОД(22; 77) = 11	$22 = 2 \cdot \underline{11}$; $77 = 7 \cdot \underline{11}$
НОД(35; 14; 28) = 7	$35 = 5 \cdot \underline{7}$; $14 = 2 \cdot \underline{7}$ $28 = 2 \cdot 2 \cdot \underline{7}$
НОД(35; 105; 140) = 35	105 : 35 = 3; 140 : 35 = 4

Полезные советы

1. Если простые множители в числах повторяются, то их можно записать в виде степеней. Тогда наибольший общий делитель содержит степень с наименьшим показателем.

Например:

$$\text{НОД}(12; 36; 24) = 2^3 \cdot 3^1 = 12,$$

так как $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = \underline{2^2} \cdot \underline{3}$, $\underline{36} = 2^3 \cdot 3^2$, $24 = 2^3 \cdot 3$

$$\text{НОД}(2^3 \cdot \underline{3^2}; 3^3 \cdot \underline{2^2}) = 3^2 \cdot 2^2 = 9 \cdot 4 = 36$$

2. Множители каждого числа являются его делителями.

3. Если каждое из двух чисел разделить на их наибольший общий делитель, то полученные числа взаимно простые.

Например: НОД(18; 12) = 6; 18 : 6 = 3; 12 : 6 = 2, отсюда НОД(2; 3) = 1, т. е. 2 и 3 — взаимно простые числа

Проверь себя!

Найдите наибольший общий делитель чисел:

а) 15 и 35; б) 18 и 24; в) 120 и 48

Ответ: а) 5; б) 6; в) 24.

Алгоритм 34 Нахождение наибольшего общего делителя двух натуральных чисел (II способ. Алгоритм Евклида)

1. Разделите большее число на меньшее; если разделилось нацело, то меньшее число — наибольший общий делитель этих чисел; если разделилось с остатком, то переходите к п. 2.
2. Разделите меньшее число на остаток от деления; если разделилось нацело, то первый остаток — наибольший общий делитель данных чисел; если вновь получили остаток, то переходите к п. 3.
3. Разделите первый остаток (п. 1) на второй (п. 2) и т. д., пока в остатке не получите 0.
4. Последний делитель — искомое число (НОД).
5. Если последний делитель равен 1, то и наибольший общий делитель равен 1, т. е. данные в условии числа взаимно простые.

Например:

НОД(128; 32) = 32	128 : 32 = 4 (ост. 0)

НОД(56; 140) = НОД(56; 28) = 28	140 : 56 = 2 (ост. 28) 56 : 28 = 2
НОД(15; 18; 24) = НОД(3; 24) = 3	НОД(15; 18) = 3 НОД(3; 24) = 3

Замечание. Если чисел больше двух (например, a, b, c), то сначала найдите НОД(a; b), а далее наибольший общий делитель числа c и НОД(a; b).

Проверь себя!

Найдите по алгоритму Евклида наибольший общий делитель чисел: а) 15 и 45; б) 78 и 91; в) 612 и 680.

Ответ: а) 15; б) 13; в) 68.

Наименьшее общее кратное (НОК)

Кратным данного натурального числа a называется такое число M, **которое** делится на число a без остатка. Кратных у чисел множество — это все числа $a \cdot n$, где n — натуральное число.

Например: 6, 12, 18, 24, ... — числа, кратные 6, так как все эти числа делятся на 6.

Общим кратным двух или нескольких натуральных чисел называется натуральное число, **которое** делится на каждое из данных чисел.

Например, общим кратным чисел 20 и 30 будут числа 60, 120, 240 и т. д.

Наименьшим общим кратным (НОК) двух или нескольких натуральных чисел называется **наименьшее** натуральное число **из всех общих кратных** данных чисел.

Например: НОК(6; 12) = 12; НОК(12; 15) = 60

Алгоритм 35 Нахождение наименьшего общего кратного (НОК) нескольких натуральных чисел (I способ)

① Проверьте, делится ли наибольшее из данных чисел на каждое из остальных чисел; если да, то это число является наименьшим общим кратным этих чисел.

Например: НОК(6; 12; 18; 36) = 36

Если наибольшее из чисел не делится на остальные, то переходите к п. 2.

② Разложите каждое число на простые множители.

③ Возьмите любое число из данных чисел (удобнее то, в котором больше множителей) и допишите к нему те множители из других чисел, которых в нем нет.

④ Вычислите полученное в п. 3 произведение, это и есть наименьшее общее кратное данных чисел.

Например, найдем НОК(18; 45) так:

18	2		45	5
9	3		9	3
3	3		3	3
1	1		1	1

$\underbrace{2 \cdot 3 \cdot 3}_{18} \cdot 5 = 18 \cdot 5 = 90$ (дописали множитель 5)

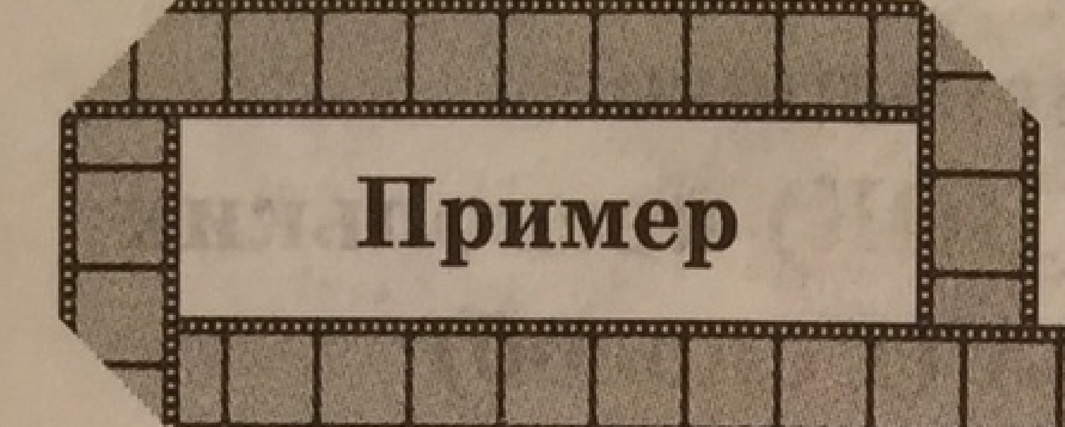
Можно записать иначе!

$\underbrace{5 \cdot 3 \cdot 3}_{45} \cdot 2 = 45 \cdot 2 = 90$ (дописали множитель 2)

Простые **множители** в обоих произведениях $45 \cdot 2$ и $18 \cdot 5$ **одинаковы:** $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$

Внимание! Наименьшее общее кратное двух взаимно простых чисел равно произведению этих чисел.

Например: НОК(7; 8) = $7 \cdot 8 = 56$



Пример

Найдите:

а) НОК(27; 81); б) НОК(18; 27); в) НОК(10; 11)

Решение.

а) НОК(27; 81) = 81	81 : 27 = 3
б) НОК(18; 27) = 27 · 2 = 54	18 = 2 · 3 · 3, 27 = 3 · 3 · 3 НОД(18; 27) = 2 · 3 · 3 · 3
в) НОК(10; 11) = 11 · 10 = 110	10 и 11 — взаимно простые числа

Ответ: а) 81; б) 54; в) 110.

Проверь себя!

Найдите наименьшее общее кратное чисел:

а) 15 и 105; б) 12 и 17; в) 24 и 18

Ответ: а) 105; б) 204; в) 72.

Алгоритм 36 Нахождение наименьшего общего кратного (НОК) нескольких натуральных чисел (II способ)

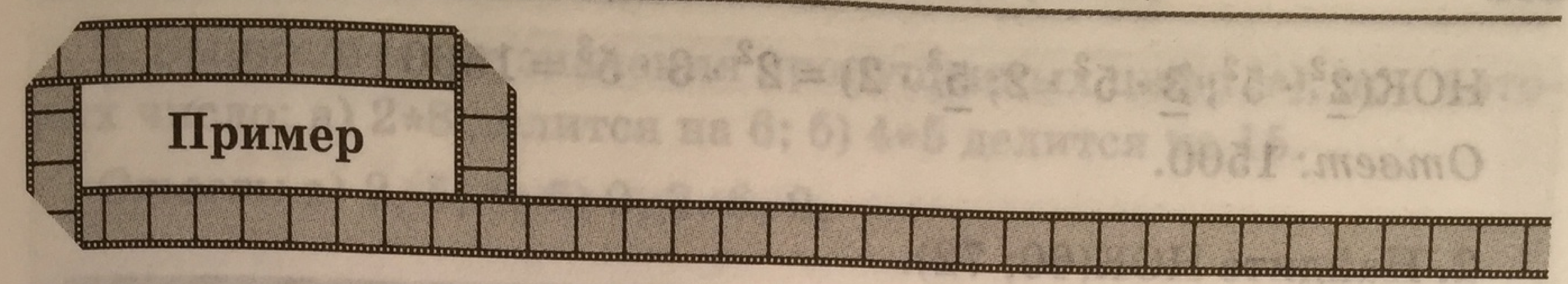
Пусть даны два натуральных числа a и b.

① Найдите НОД(a; b).

② Подставьте a, b и НОД(a; b) в формулу:

$$\text{НОК}(a; b) = (a \cdot b) : \text{НОД}(a; b)$$

$$\text{НОК}(a; b) = \frac{a \cdot b}{\text{НОД}(a; b)}$$



Найдите НОК(18; 45).

Решение.

1) НОД(18; 45) = 9

2) $\text{НОК}(18;\ 45) = \dfrac{18 \cdot 45}{\text{НОД}(18;\ 45)} = \dfrac{18 \cdot 45}{9} = 90$

Ответ: 90.

Проверь себя!

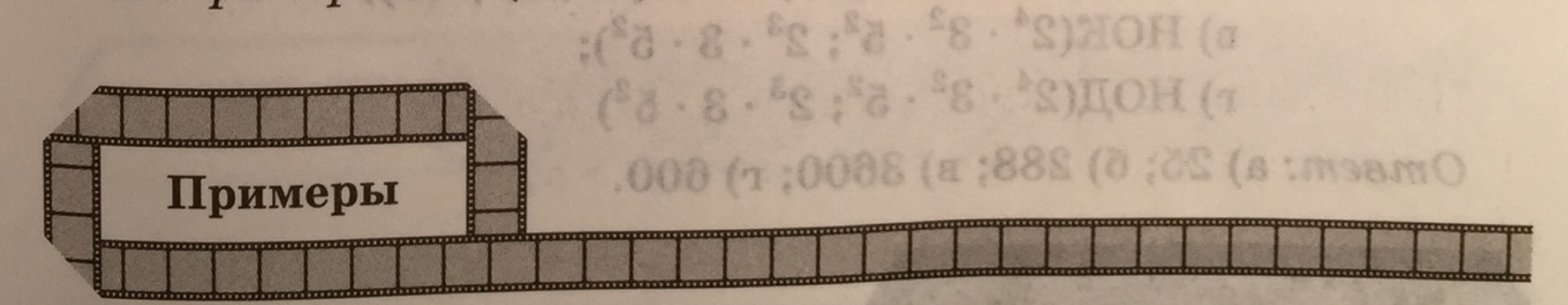
Найдите НОК(72; 48) (II способом).

Ответ: 144.

Полезный совет

Если числа записаны в виде степеней, то наименьшее общее кратное этих чисел будет содержать степени множителей с **наибольшим** показателем.

Например: $\text{НОК}(8;\ 50) = \text{НОК}(2^3;\ 2 \cdot 5^2) = 2^3 \cdot 5^2 = 200$



1. Найдите НОК(100; 150; 250).

Решение.

$100 = \underline{2}^2 \cdot \underline{5}^2;\ 150 = \underline{3} \cdot 5^2 \cdot 2;\ 250 = \underline{5}^3 \cdot 2$

НОК($\underline{2}^2 \cdot 5^2$; $\underline{3} \cdot 5^2 \cdot 2$; $\underline{5}^3 \cdot 2$) $= 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 = 1500$

Ответ: 1500.

2. Найдите НОК(60; 72).

Решение.

НОК(60; 72) $= \dfrac{60 \cdot 72}{\text{НОД}(60; 72)} = \dfrac{60 \cdot 72}{12} = 360$ | $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$; $72 = 2^3 \cdot 3^2$; НОД(60; 72) = 12

Ответ: 360.

3. Запишите числа, кратные 14 и меньшие 50.

Решение.

$14 \cdot 1 = 14$; $14 \cdot 2 = 28$; $14 \cdot 3 = 42$; $14 \cdot 4 = 56$ (больше 50)

Ответ: 14, 28, 42.

Вычислите (4—5).

4. НОК($\underline{2}^4 \cdot 3^2 \cdot 5$; $2^3 \cdot \underline{3}^3 \cdot \underline{5}^2$) $= 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 =$
$= 16 \cdot 27 \cdot 25 = (16 \cdot 25) \cdot 27 = 400 \cdot 27 = 10\,800$ | $2^4 = 16$; $3^3 = 27$ (по таблице)

5. НОД($2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2$; $\underline{2}^2 \cdot \underline{3}^2 \cdot 5$) $= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 4 \cdot 9 \cdot 5 = 20 \cdot 9 = 180$

Проверь себя!

Найдите: а) НОД(150; 175); б) НОК(32; 36; 48);
в) НОК($2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$; $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$);
г) НОД($2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$; $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$)

Ответ: а) 25; б) 288; в) 3600; г) 600.

Попробуй не реши!

1. Вычислите НОК(270; 720).

Ответ: 2160.

2. Выпишите все значения пропущенных цифр (*), при которых число: а) 2*8 делится на 6; б) 4*5 делится на 15.

Ответ: а) 2, 5, 8; б) 0, 3, 6, 9.

Попробуй-ка реши!

1. Какую цифру надо приписать к числу 10 слева и справа, чтобы получить число, кратное 72? Запишите полученное число.

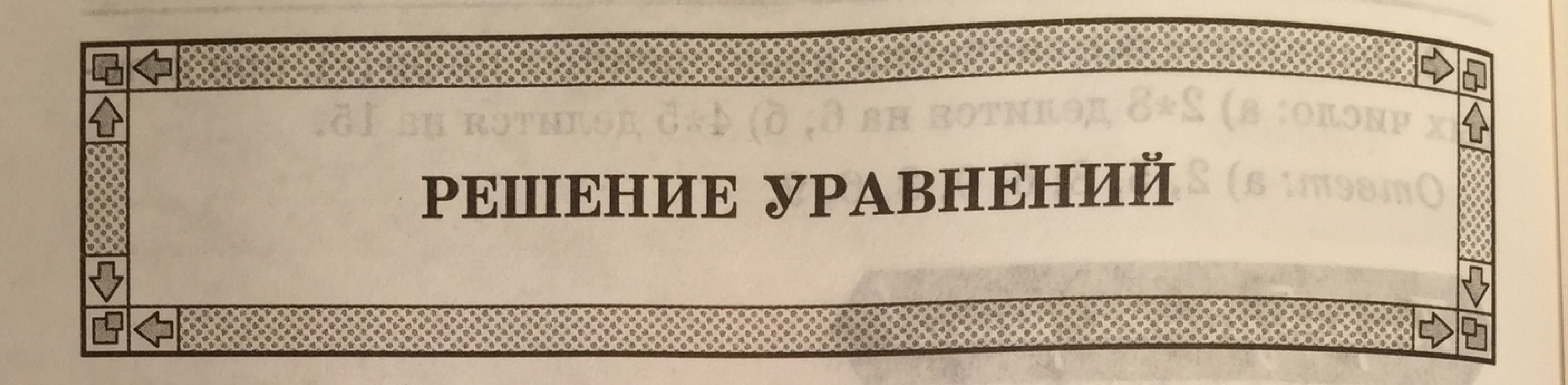
Ответ: 4104.

2. Найдите четыре последовательных натуральных числа, произведение которых равно 1680.

Ответ: 5, 6, 7, 8.

3. Задача. Вдоль дороги поставлены столбы на расстоянии 45 м друг от друга. Их заменили новыми столбами, расстояние между которыми равно 60 м. При этом новый первый столб ставят на место прежнего первого столба. Через сколько метров от первого столба мести́ установки старых и новых столбов совпадут?

Ответ: 180 м.



РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Уравнением называется равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой.

Корнем уравнения называется такое значение буквы, при подстановке которого в уравнение оно обратится в верное числовое равенство.

Например, уравнение $25 + x = 30$ обратится в верное числовое равенство при $x = 5$, так как $25 + 5 = 30$, значит, число 5 — корень уравнения.

Решить уравнение — значит найти все его корни или убедиться, что корней нет.

Например, уравнение $x + 2 = 5$ имеет один корень $x = 3$; уравнение $(x + 1)(x - 2) = 0$ имеет два корня $x = -1$ и $x = 2$; уравнение $x \cdot 0 = 0$ имеет множество корней (x — любое число); уравнение $x + 2 = 1$ не имеет корней среди натуральных чисел, так как нет такого натурального числа, которое в сумме с числом 2 даст 1 $(2 > 1)$.

Решение простейших уравнений можно записать так:

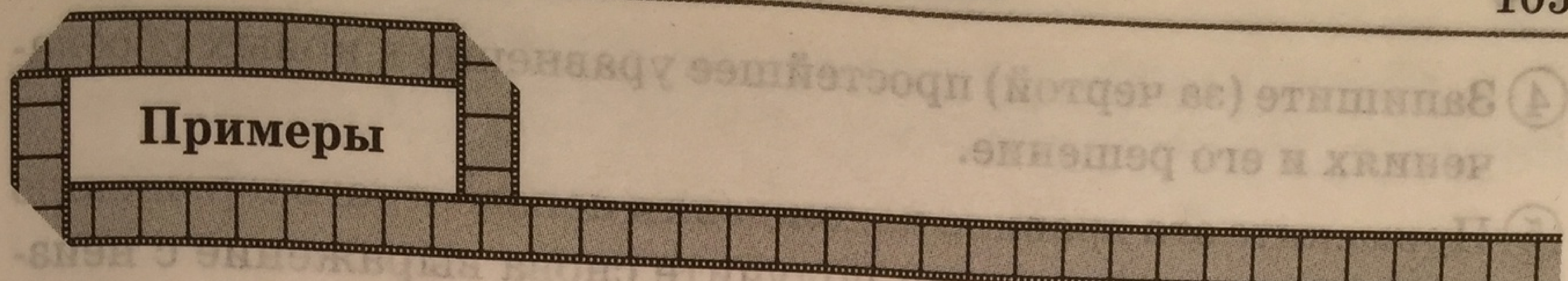
$$x + a = b,\ \ x = b - a\ (b > a)$$

$$x - a = b,\ \ x = b + a\ (x > a)$$

$$x \cdot a = b,\ \ x = b : a\ (b > a)$$

$$x : a = b,\ \ x = b \cdot a\ (x > a)$$

$$a : x = b,\ \ x = a : b\ (a > b)$$



Решите уравнения: а) $12 + a = 15$; б) $x - 8 = 15$; в) $25 : x = 25$.

Решение.

а) $12 + a = 15$
$a = 15 - 12$
$a = 3$

б) $x - 8 = 15$
$x = 15 + 8$
$x = 23$

в) $25 : x = 25$
$x = 25 : 25$
$x = 1$

Ответ: а) 3; б) 23; в) 1.

Решение уравнений, в левой части которых два или более действий, содержащих неизвестное, будем сводить к решению простейших уравнений, обозначая отличной от неизвестного буквой выражение, содержащее неизвестное.

Например, в уравнении $x : 8 - 6 = 5$ обозначим буквой y частное чисел x и 8, т. е. $y = x : 8$, получим простейшее уравнение $y - 6 = 5$, откуда $y = 11$.

$$x : 8 = y, \text{ т. е. } x : 8 = 11,\ x = 11 \cdot 8,\ x = 88$$

Замечание. Уравнение может содержать только один знак равенства, т. е. **нельзя** записать $x = 11 \cdot 8 = 88$, а надо писать так: $x = 11 \cdot 8$; $x = 88$.

Алгоритм 37 Решение уравнений, сводящихся к простейшим уравнениям

① Если в уравнении есть действия над числами, то выполните их.

② Установите, какое действие является последним в той части уравнения, в которую входит неизвестное.

③ Обозначьте выражение с неизвестным другой буквой (например, x, y, z, t, ...), а все известные числа буквами a, b, c, d, e, ...

④ Запишите (за чертой) простейшее уравнение в новых обозначениях и его решение.

⑤ Примените это правило нахождения неизвестного к решению данного уравнения; если получите снова выражение с неизвестным, то перейдите к п. 6.

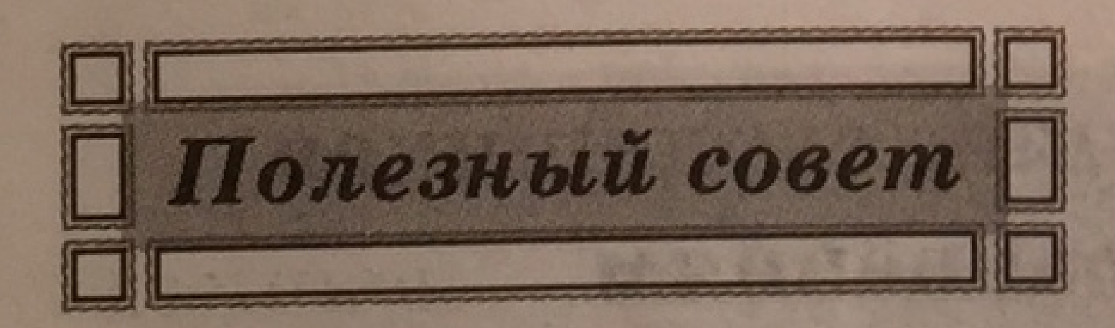
⑥ Продолжайте этот процесс до тех пор, пока не найдете искомое неизвестное.

⑦ Ответ запишите числом.

Например, решение уравнения $30 = (5x + 15) : 2$ можно записать так:

1) $\underbrace{30}_{b} = \underbrace{(5x + 15)}_{y} : \underbrace{2}_{a}$	Последнее действие — деление
$5x + 15 = 30 \cdot 2$	$b = y : a,\ y = b \cdot a$
2) $\underbrace{5x}_{z} + \underbrace{15}_{c} = \underbrace{60}_{d}$	$z + c = d,\ z = d - c$
3) $5x = 60 - 15$ $5x = 45$ $x = 45 : 5$ $x = 9$	$kx = p,\ x = p : k$

Ответ: 9.



Неизвестное число в уравнении может быть обозначено любой буквой (а не только буквой x).

Если неизвестное, обозначенное буквой, заключено в скобки вместе с действиями над числами, то всю скобку принимайте за новое неизвестное, а затем постепенно находите x по алгоритму.

Примеры

Решите уравнения (1—3).

1. $(x - 70) : 40 = 380$

Решение.

$\underbrace{(x - 70)}_{y} : \underbrace{40}_{a} = \underbrace{380}_{b}$

$x - 70 = 380 \cdot 40$

$x - 70 = 1520$

$x = 1520 + 70$

$x = 1590$

Ответ: 1590.

Последнее действие — деление

$y : a = b,\ y = b \cdot a$

$x - c = d,\ x = d + c$

2. $32 \cdot (a : 54 - 48) + 94 = 158$

Решение.

$\underbrace{\overset{3}{32 \cdot} (a \overset{1}{:} 54 \overset{2}{-} 48)}_{x} \overset{4}{+} \underbrace{94}_{c} = \underbrace{158}_{b}$

$32 \cdot (a : 54 - 48) = 158 - 94$

$\underbrace{32}_{d} \cdot \underbrace{(a : 54 - 48)}_{y} = \underbrace{64}_{k}$

$a : 54 - 48 = 64 : 32$

$\underbrace{a : 54}_{z} - \underbrace{48}_{m} = \underbrace{2}_{n}$

$a : 54 = 2 + 48$

$a : 54 = 50$

$a = 54 \cdot 50$

$a = 2700$

Ответ: 2700.

Последнее действие — сложение

$x + c = b,\ x = b - c$

Последнее действие — умножение

$d \cdot y = k,\ y = k : d$

Последнее действие — вычитание

$z - m = n,\ z = m + n$

$a : p = q,\ a = q \cdot p$

3. $2^3 \cdot (x - 8) = 2^4 \cdot 7$

Решение.

$\underbrace{8}_{a} \cdot \underbrace{(x - 8)}_{y} = \underbrace{16 \cdot 7}_{c}$ — $2^3 = 8$, $2^4 = 16$ (по таблице)

$x - 8 = (16 \cdot 7) : 8$ — $a \cdot y = c$, $y = c : a$; $(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$; $(16 \cdot 7) : 8 = (16 : 8) \cdot 7 = 14$

$x - 8 = 14$

$x = 14 + 8$ — $x - m = n$, $x = m + n$

$x = 22$

Ответ: 22.

Попробуй не реши!

Решите уравнение:

а) $m : 35 = 126$

б) $4410 : k = 126$

в) $35x = 4410$

г) $13 + 10t = 163$

д) $181 - 8r = 45$

е) $(600 - x) \cdot 32 = 160$

Ответ: а) 4410; б) 35; в) 126; г) 15; д) 17; е) 595.

2. Сумма двух чисел равна 265. Найдите эти числа, если одно из них в 4 раза меньше другого.

Ответ: 212 и 53.

Попробуй-ка реши!

Решите уравнение:

а) $(x \cdot 253) : 11 = 2346 : 34$; б) $264 - (200 + 2y) = 50$

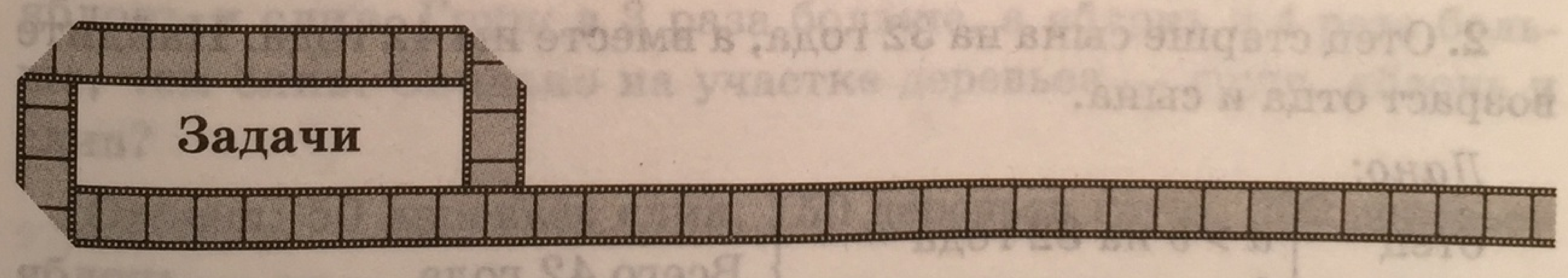
Ответ: а) 3; б) 7.

Алгоритм 38 Решение задач с помощью уравнений

① Запишите кратко условие задачи (*Дано* и *Найти*), обозначив все данные в задаче буквами a, b, c, ...
② Составьте общую формулу решения.
③ Выберите меньшую из неизвестных величин (необязательно искомую) и примите ее за x.
④ Выразите через x остальные величины, встречающиеся в условии задачи.
⑤ Подставьте все величины в общую формулу решения.
⑥ Решите полученное уравнение относительно x.
⑦ Найдите искомую величину (по требованию задачи).
⑧ Ответ запишите полностью.

Полезный совет

Все известные величины в задаче называйте буквами a, b, c, ..., а неизвестную — буквой x.



1. На первой автостоянке машин в 2 раза больше, чем на второй, а на третьей стоянке на 15 машин больше, чем на второй. Всего на трех автостоянках было 135 машин. Сколько машин стояло на третьей автостоянке?

Дано:

I стоянка	$a > b$ в 2 раза	Всего 135 машин
II стоянка	b — меньшее число машин	
III стоянка	$c > b$ на 15 машин	

Найти число машин на III стоянке.

Решение.

Общая формула решения: $a + b + c = 135$

Пусть $b = x$ — число машин на II стоянке, тогда	b — наименьшее число

$a = 2x$ — число машин на I стоянке

$c = x + 15$ — число машин на III стоянке

Подставим a, b, c, выраженные через x, в общую формулу решения.

$2x + x + x + 15 = 135$	$a \cdot c + b \cdot c = c \cdot (a + b)$
$\underbrace{4x}_{y} + \underbrace{15}_{m} = \underbrace{135}_{n}$	Последнее действие — сложение
$4x = 135 - 15$	$y + m = n,\ y = n - m$
$4x = 120$	
$x = 120 : 4$	$kx = p,\ x = p : k$
$x = 30$	

$b = 30$ машин на II стоянке

$c = x + 15 = 30 + 15 = 45$ (машин) — на III стоянке

Ответ: на III стоянке было 45 машин.

2. Отец старше сына на 32 года, а вместе им 42 года. Найдите возраст отца и сына.

Дано:

отец	$a > b$ на 32 года	Всего 42 года
сын	b — меньшее число	

Найти возраст отца и возраст сына.

Решение.

Общая формула решения: $a + b = 42$.

Пусть $b = x$ (лет) — возраст сына, тогда $a = x + 32$ (года) — возраст отца

Подставим a и b, выраженные через x, в общую формулу решения.

$x + 32 + x = 42$

$\underbrace{32}_{m} + \underbrace{2x}_{y} = \underbrace{42}_{n}$

$2x = 42 - 32$

$2x = 10$

$x = 5$

$a \cdot c + b \cdot c = c \cdot (a + b)$

Последнее действие — сложение

$m + y = n,\ y = n - m$

$kx = p,\ x = p : k$

$b = 5$ (лет) — возраст сына,

тогда $a = 5 + 32 = 37$ (лет) — возраст отца

Ответ: сыну 5 лет, отцу 37 лет.

Проверь себя!

Решите задачи.

1. В один магазин привезли клубники на 30 кг больше, чем в другой. В оба магазина привезли всего 120 кг клубники. Сколько клубники привезли в каждый магазин?

Ответ: 45 кг и 75 кг.

2. На пришкольном участке 400 плодовых деревьев — груш, яблонь и слив. Груш в 3 раза больше, а яблонь в 4 раза больше, чем слив. Сколько на участке деревьев — груш, яблонь и слив?

Ответ: 50 деревьев слив, 150 деревьев груш, 200 деревьев яблонь.

Задачи на движение

Условные обозначения:

s — путь в километрах (км), метрах (м)

t — время в часах (ч), минутах (мин), секундах (с)

v — скорость в километрах в час (км/ч), километрах в минуту (км/мин), метрах в минуту (м/мин), метрах в секунду (м/с)

Путь, скорость и время связаны формулами:

$$s = v \cdot t \qquad v = \frac{s}{t} \qquad t = s : v$$

Условимся называть скорость, с которой объекты приближаются друг к другу, *скоростью сближения* ($v_{сбл}$), а скорость, с которой объекты удаляются друг от друга, *скоростью удаления* ($v_{уд}$).

Алгоритм 39 Решение задач на движение навстречу друг другу

① Если дано, что объекты выехали навстречу друг другу одновременно, то скорость, с которой они сближались, равна сумме скоростей объектов, т. е.

$$v_{сбл} = v_1 + v_2$$

Расстояние между пунктами отправления объектов находите по формуле

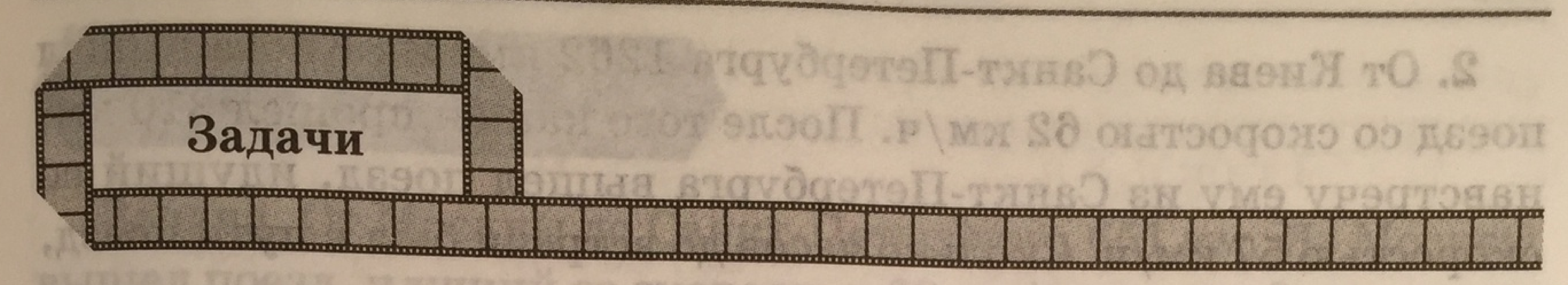
$$s = (v_1 + v_2) \cdot t$$

а время находите по формуле

$$t = s : (v_1 + v_2)$$

② Если дано расстояние, которое прошли оба объекта вместе до встречи (s), время (t) и одна из скоростей (v_1),

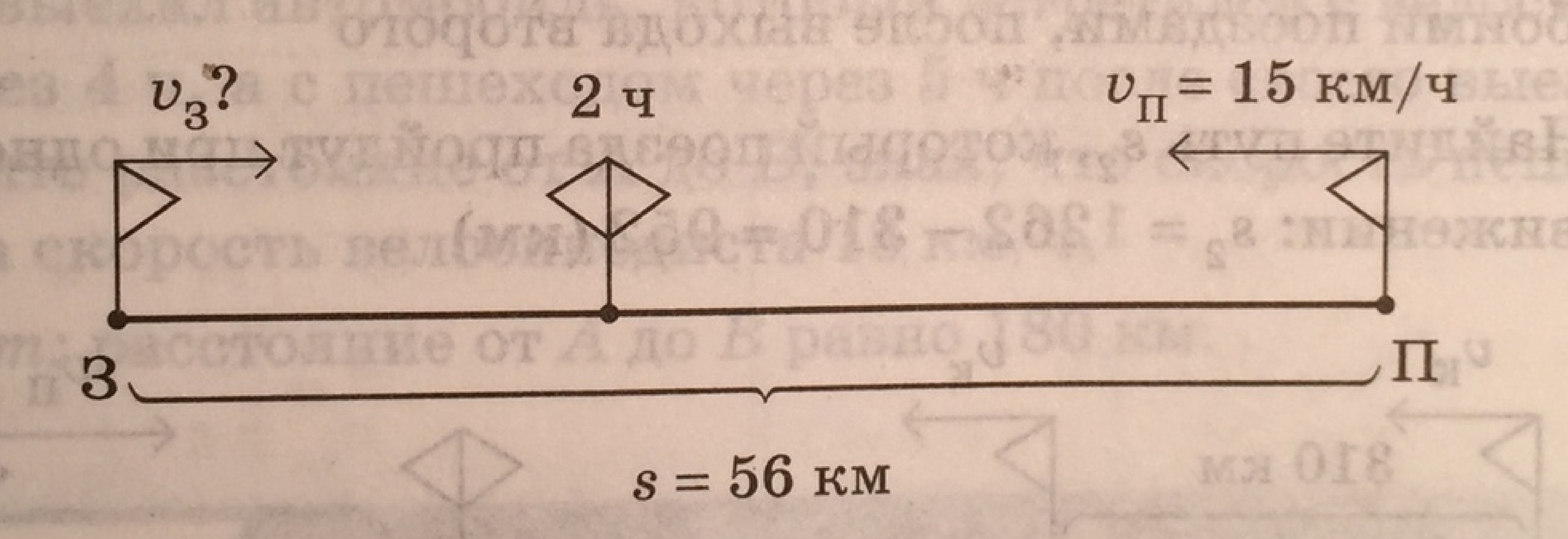
то $v_2 = v_{сбл} - v_1$, $v_{сбл} = s : t$



1. Из Санкт-Петербурга и Зеленогорска, расстояние между которыми равно 56 км, одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста и встретились через 2 ч. С какой скоростью ехал велосипедист из Зеленогорска, если велосипедист из Санкт-Петербурга ехал со скоростью 15 км/ч?

Дано:

$s = 56$ км	$v_З$ — скорость из Зеленогорска
$t = 2$ ч	$v_П$ — скорость из Санкт-Петербурга
$v_П = 15$ км/ч	



Найти $v_З$.

Решение.

Общая формула решения: $v_З = v_{сбл} - v_П$

$v_{сбл} = 56 : 2 = 28$ (км/ч) | $v_{сбл} = v_З + v_П$; $v_{сбл} = s : t$

Подставим $v_{сбл}$ в общую формулу решения:

$v_З = 28 - 15 = 13$ (км/ч) | $v_З = v_{сбл} - v_П$

Ответ: скорость велосипедиста из Зеленогорска равна 13 км/ч.

2. От Киева до Санкт-Петербурга 1262 км. Из Киева вышел поезд со скоростью 62 км/ч. После того как он прошел 310 км, навстречу ему из Санкт-Петербурга вышел поезд, идущий со скоростью 57 км/ч. Сколько часов до встречи был в пути поезд, который вышел из Санкт-Петербурга?

Дано:

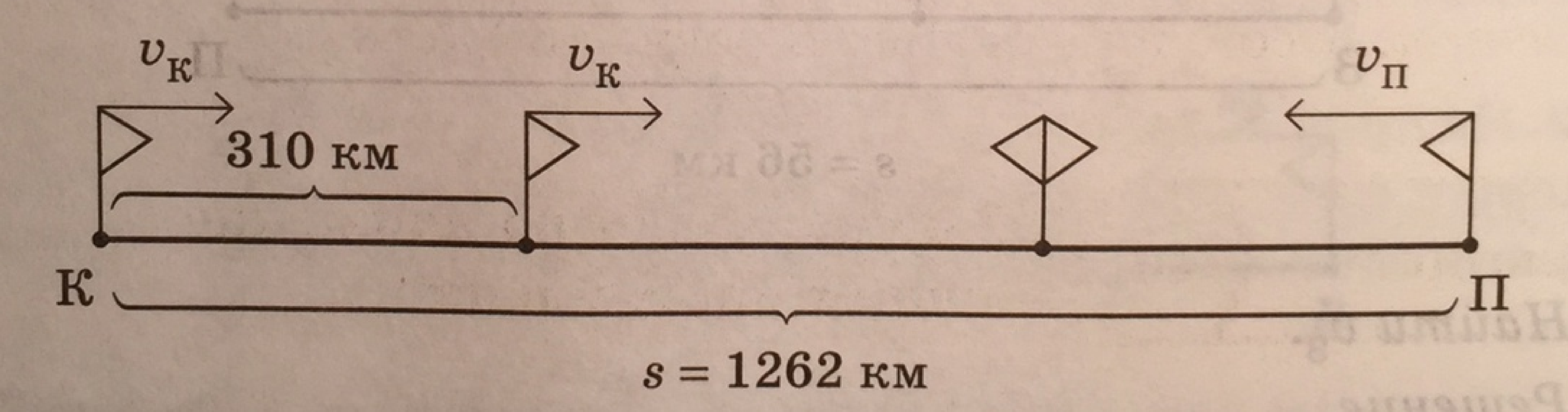
из Киева	$v_К = 62$ км/ч, $s_1 = 310$ км	$s = 1262$ км
из Санкт-Петербурга	$v_П = 57$ км/ч	

Найти, сколько часов был в пути поезд, который вышел из Санкт-Петербурга (до встречи).

Решение.

Общая формула решения: $t = s_2 : v_{сбл}$, где s_2 — путь, пройденный обоими поездами, после выхода второго

1) Найдите путь s_2, который поезда пройдут при одновременном движении: $s_2 = 1262 - 310 = 952$ (км)



2) Найдите скорость сближения:

$v_{сбл} = 62 + 57 = 119$ (км/ч) | $v_{сбл} = v_К + v_П$

3) Найдите время движения поездов до встречи (при одновременном движении):

$t = 952 : 119 = 8$ (ч) | $t = s_2 : v_{сбл}$

Ответ: поезд, который вышел из Санкт-Петербурга, был в пути до встречи 8 ч.

Попробуй не реши!

Задача. От Москвы до Санкт-Петербурга 651 км. Из Москвы вышел поезд, идущий со скоростью 69 км/ч, а через 3 ч навстречу ему из Санкт-Петербурга вышел экспресс, идущий со скоростью 153 км/ч. Через сколько часов с момента выхода поезда из Москвы поезда встретились?

Ответ: поезда встретились через 5 ч.

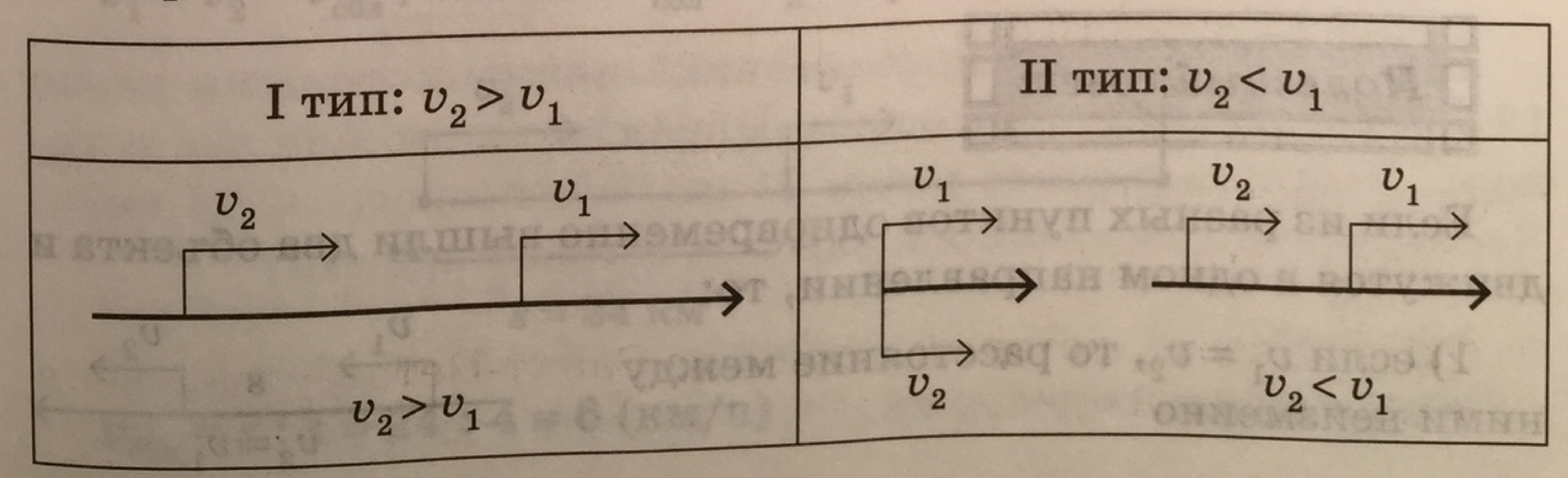
Попробуй-ка реши!

Задача. Из пункта *A* в пункт *B* отправились одновременно два человека: один пешком, а другой на велосипеде. В то же время из *B* в *A* выехал автомобиль, который встретился с велосипедистом через 4 ч, а с пешеходом через 5 ч после своего выезда из *B*. Найдите расстояние от *A* до *B*, зная, что скорость пешехода 6 км/ч, а скорость велосипедиста 15 км/ч.

Ответ: расстояние от *A* до *B* равно 180 км.

Алгоритм 40 Решение задач на движение в одном направлении

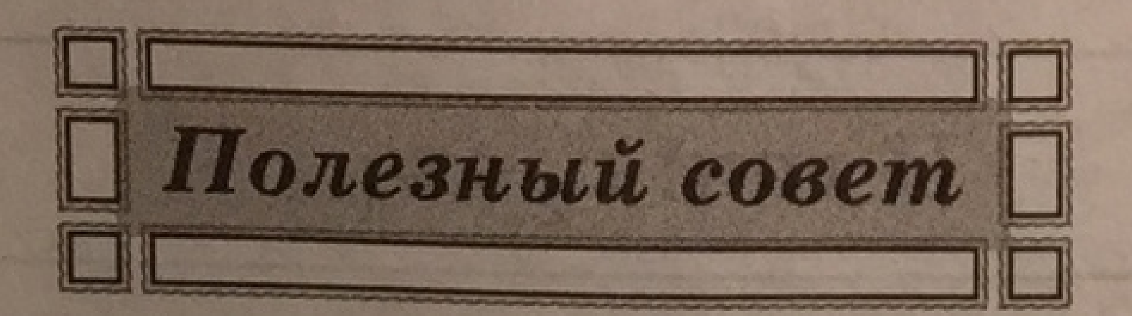
Рассмотрим два типа задач на движение в одном направлении одновременно.



Окончание табл.

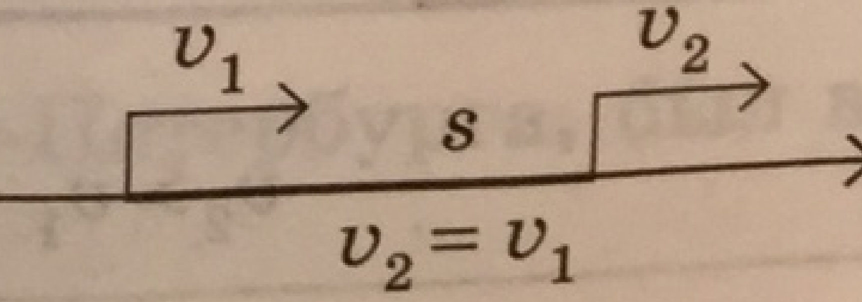
I тип: $v_2 > v_1$	II тип: $v_2 < v_1$
① Скорость сближения (удаления) объектов ($v_б$ — бо́льшая скорость, $v_м$ — меньшая скорость)	
$v_{сбл} = v_б - v_м = v_2 - v_1$	$v_{уд} = v_б - v_м = v_1 - v_2$
② Расстояние, на которое один объект	
приблизился к другому	удалился от другого
$s = v_{сбл} \cdot t$	$s = v_{уд} \cdot t$
③ Время сближения (удаления) объектов	
$t = s : v_{сбл}$	$t = s : v_{уд}$
④ Скорости движения, сближения, удаления	
$v_б = v_{сбл} + v_м$ $v_м = v_б - v_{сбл}$ $v_{сбл} = s : t$	$v_б = v_{уд} + v_м$ $v_м = v_б - v_{уд}$ $v_{уд} = s : t$

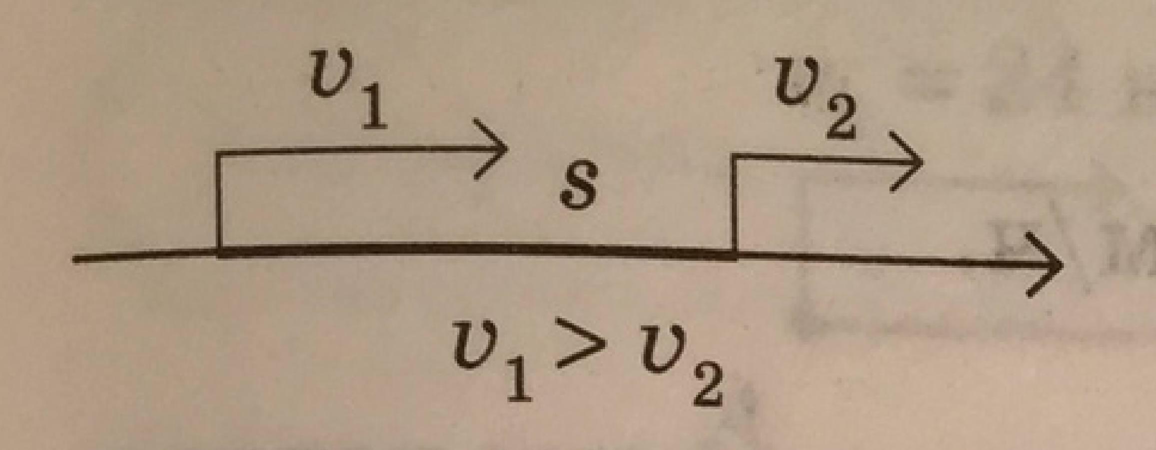
Замечание. Формулы зависимости пути, времени и скорости движения объектов для I и II типов задач одинаковые; различие типов задач заключается в скорости, с которой они сближаются или удаляются друг от друга.



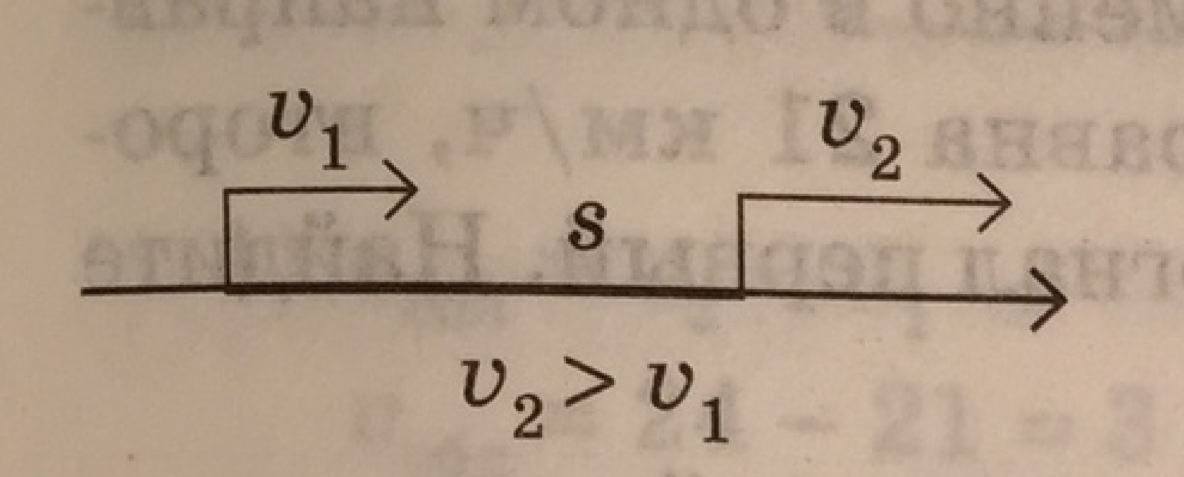
Если из разных пунктов одновременно вышли два объекта и движутся в одном направлении, то:

1) если $v_1 = v_2$, то расстояние между ними неизменно

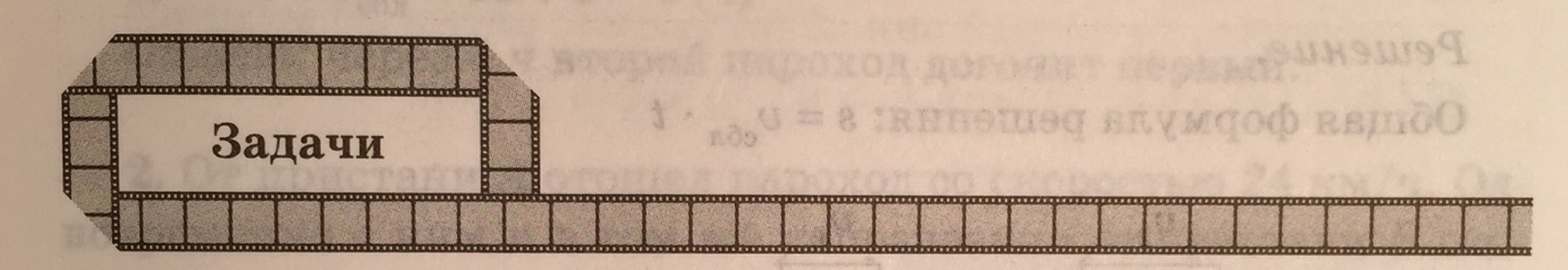




2) если $v_1 > v_2$, то расстояние между ними уменьшается и объекты будут сближаться со скоростью $v_{сбл} = v_1 - v_2$



3) если $v_2 > v_1$, то расстояние между ними увеличивается и второй объект будет удаляться от первого со скоростью $v_{уд} = v_2 - v_1$



1. Из двух пунктов, находящихся на расстоянии 24 км, одновременно выехали в одном направлении две автомашины. Вторая машина, скорость которой 62 км/ч, догоняет первую через 4 ч. Чему равна скорость первой машины?

Дано:

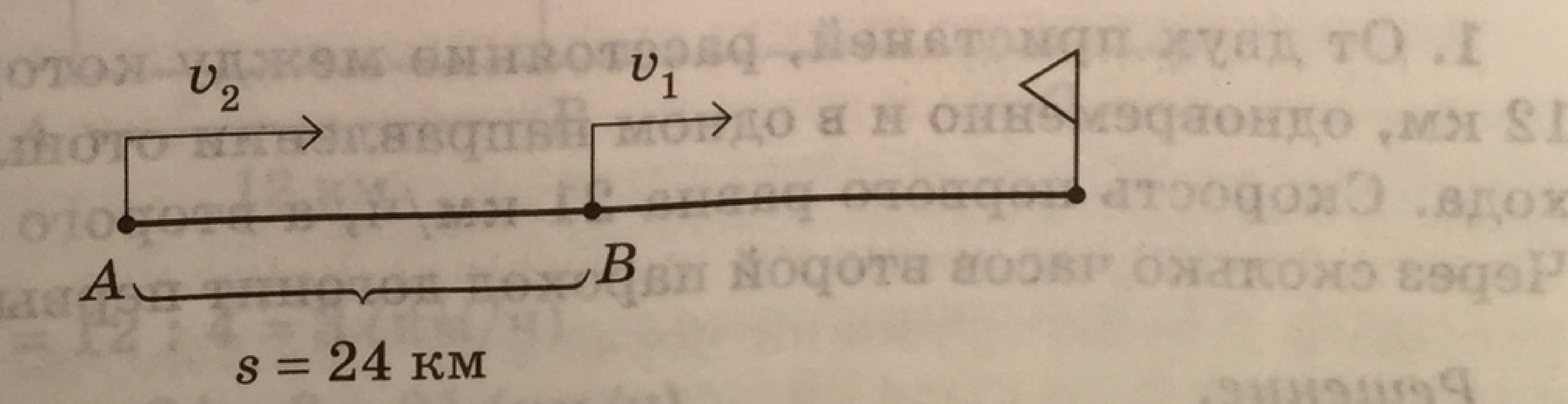
I машина	v_1	$t = 4$ ч	$s = 24$ км
II машина	$v_2 = 62$ км/ч		$v_2 > v_1$

Найти v_1.

Решение.

Общая формула решения:

$v_1 = v_2 - v_{сбл}$, так как $v_{сбл} = v_2 - v_1$



$v_{сбл} = s : t = 24 : 4 = 6$ (км/ч)

$v_1 = v_2 - v_{сбл} = 62 - 6 = 56$ (км/ч)

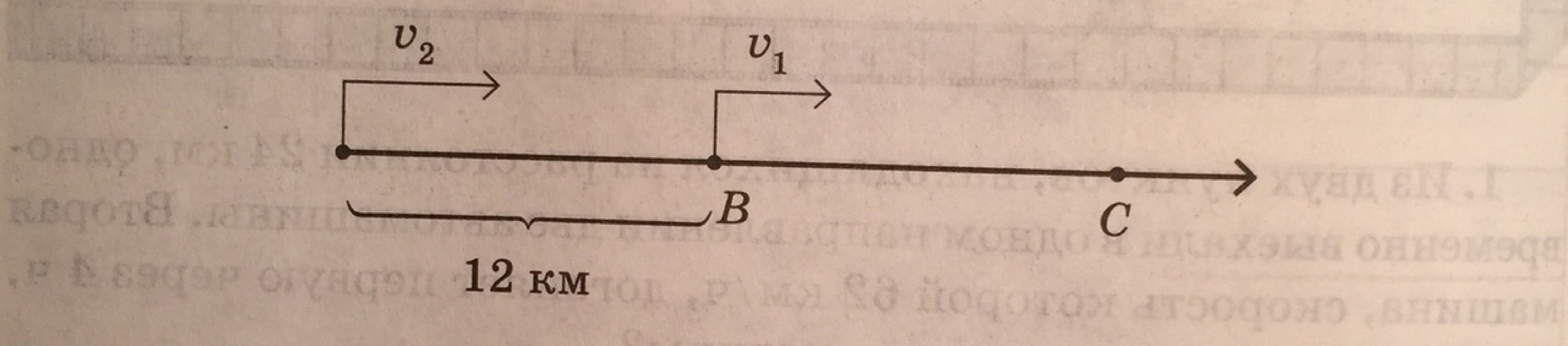
Ответ: скорость первой машины 56 км/ч.

2. От двух пристаней отошли одновременно в одном направлении два парохода. Скорость первого равна 21 км/ч, второго — 24 км/ч. Через 4 ч второй пароход догнал первый. Найдите расстояние между пристанями.

Составьте и решите две задачи, обратные данной.

Решение.

Общая формула решения: $s = v_{сбл} \cdot t$



1) $v_{сбл} = v_2 - v_1 = 24 - 21 = 3$ (км/ч)

2) $s = 3 \cdot 4 = 12$ (км) | $s = v_{сбл} \cdot t$

Ответ: расстояние между пристанями 12 км.

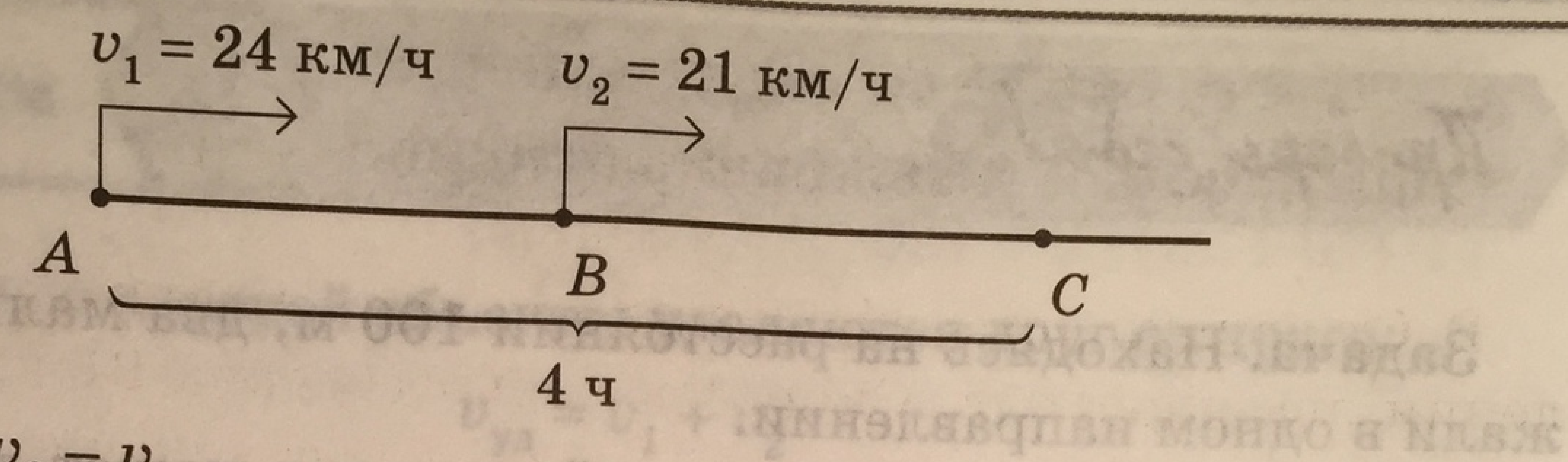
Замечание. В обратных задачах неизвестными станут величины, известные в первой задаче, а величина, найденная в результате решения первой задачи, станет известной.

Обратные задачи

1. От двух пристаней, расстояние между которыми равно 12 км, одновременно и в одном направлении отошли два парохода. Скорость первого равна 21 км/ч, а второго — 24 км/ч. Через сколько часов второй пароход догонит первый?

Решение.

Общая формула решения: $t = s : v_{сбл}$



1) $v_{сбл} = v_2 - v_1$

$v_{сбл} = 24 - 21 = 3$ (км/ч)

2) $t = s : v_{сбл} = 12 : 3 = 4$ (ч)

Ответ: через 4 ч второй пароход догонит первый.

2. От пристани *A* отошел пароход со скоростью 24 км/ч. Одновременно с ним и в том же направлении от пристани *B* отошел другой пароход. Через 4 ч первый пароход догнал второй. Найдите скорость второго парохода, если расстояние между пристанями равно 12 км.

Дано:

I пароход	$v_1 = 24$ км/ч	через 4 ч догонит II	$AB = 12$ км
II пароход	$v_2 < v_1$		

Найти скорость второго парохода.

Решение.

Общая формула решения: $v_2 = v_1 - v_{сбл}$

4 ч

v_1 v_2

A B C

12 км

$v_{сбл} = s : t = 12 : 4 = 3$ (км/ч)

$v_2 = v_1 - v_{сбл} = 24 - 3 = 21$ (км/ч)

Ответ: скорость второго парохода 21 км/ч.

Проверь себя!

Задача. Находясь на расстоянии 100 м, два мальчика побежали в одном направлении.

а) При каком условии первый мальчик может догнать второго?

б) Через какое время первый мальчик догонит второго, если скорость, с которой они сближались, равна 20 м/мин?

Ответ: а) при условии $v_1 > v_2$; б) через 5 мин.

Попробуй не реши!

Задача. Два велосипедиста выехали одновременно в одном направлении из двух пунктов, расстояние между которыми 18 км. Первый ехал со скоростью 18 км/ч и догнал второго через 3 ч. Найдите скорость второго велосипедиста.

Составьте и решите две обратные задачи.

Ответ: $v_2 = 12$ км/ч.

Попробуй-ка реши!

Задача. Из одного пункта выехали одновременно в одном направлении мотоцикл и грузовик. Скорость мотоцикла 100 км/ч, а грузовика 50 км/ч. Через 2 ч мотоцикл сделал остановку. Спустя некоторое время он продолжил движение с той же скоростью и догнал грузовик через 1 ч. Сколько часов простоял мотоцикл?

Ответ: 3 ч.

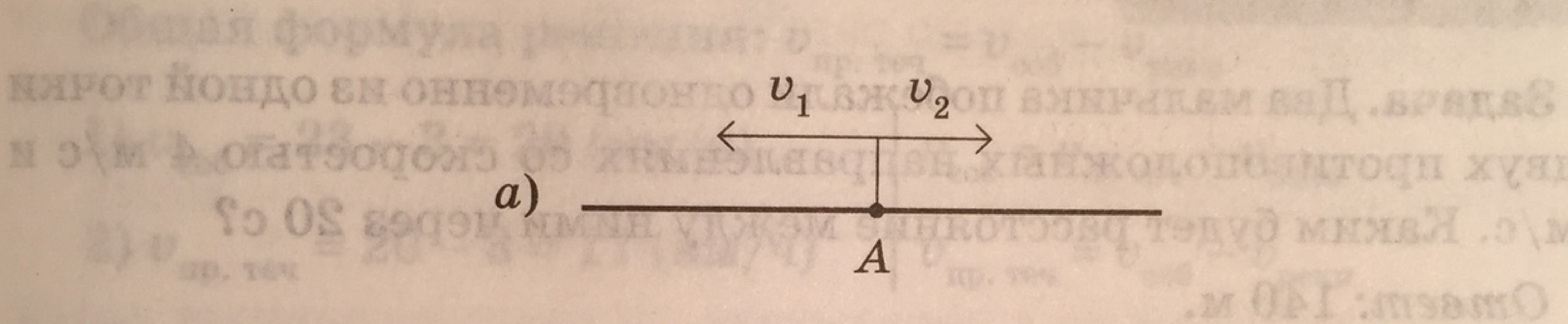
Алгоритм 41 Решение задач на движение в противоположных направлениях

① Скорость, с которой объекты удаляются друг от друга:

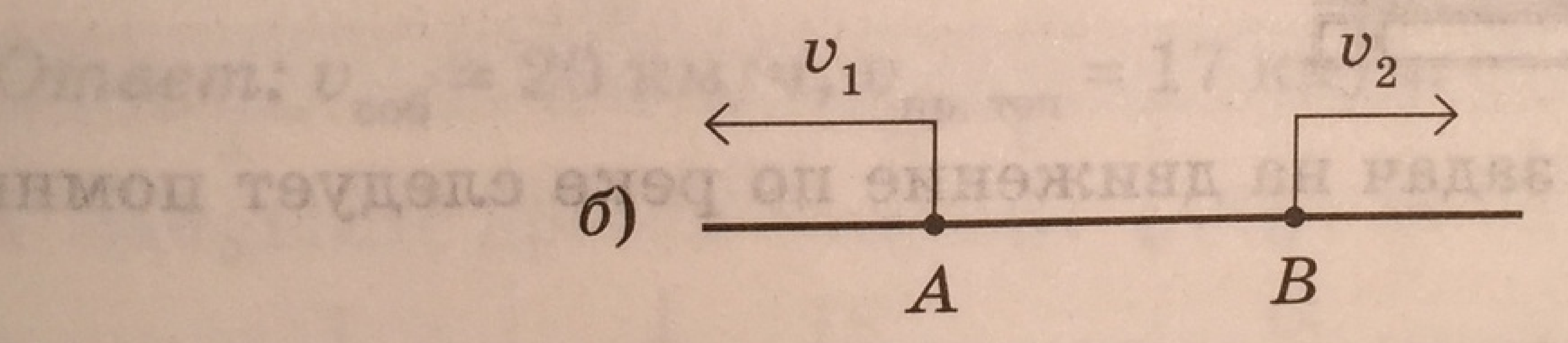
$$v_{уд} = v_1 + v_2$$

② Расстояние:

$s = (v_1 + v_2) \cdot t$ (рис. *а*)



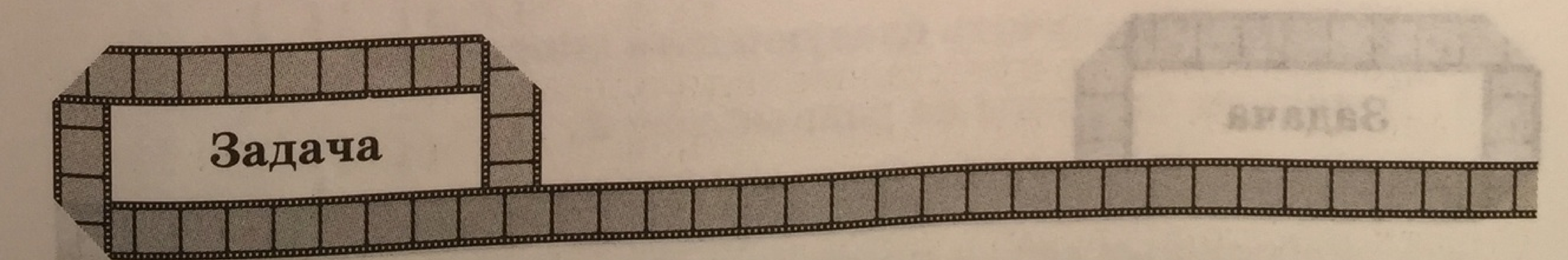
$s = s_{AB} + (v_1 + v_2) \cdot t$ (рис. *б*)



③ $v_{уд} = s : t$ (случай *а*)

$v_{уд} = (s - s_{AB}) : t$ (случай *б*)

④ $t = s : v_{уд}$



С одного вокзала одновременно в противоположных направлениях отошли два поезда со скоростью 80 км/ч и 70 км/ч. Каким будет расстояние между поездами через 3 ч?

Решение.

Общая формула решения: $s = (v_1 + v_2) \cdot t$

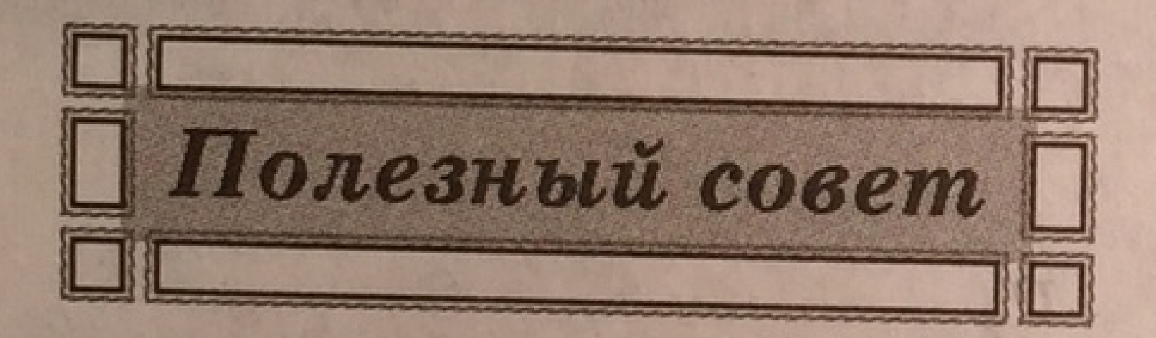
$s = (70 + 80) \cdot 3 = 150 \cdot 3 = 450$ (км)

Ответ: через 3 ч расстояние между поездами будет равно 450 км.

Проверь себя!

Задача. Два мальчика побежали одновременно из одной точки в двух противоположных направлениях со скоростью 4 м/с и 3 м/с. Каким будет расстояние между ними через 20 с?

Ответ: 140 м.



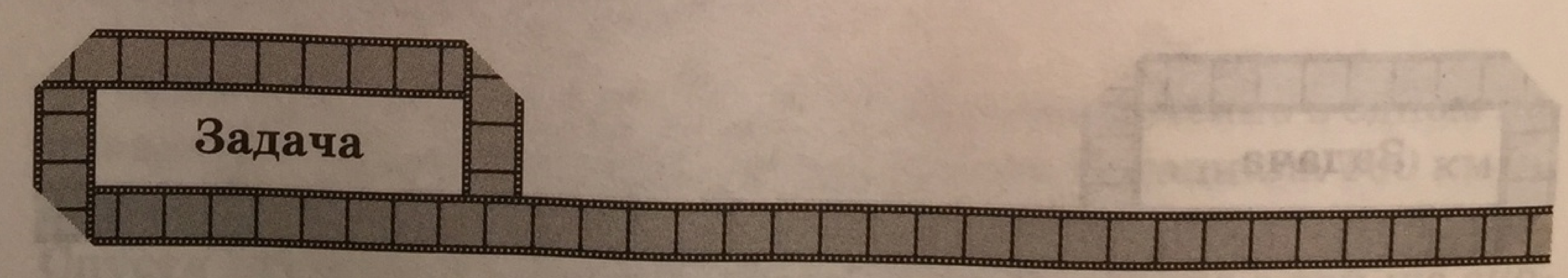
При решении задач на движение по реке следует помнить формулы:

$$v_{\text{по теч}} = v_{\text{соб}} + v_{\text{реки}}$$

$$v_{\text{пр. теч}} = v_{\text{соб}} - v_{\text{реки}}$$

$$v_{\text{плота}} = v_{\text{реки}}$$

$$v_{\text{соб}} = (v_{\text{по теч}} + v_{\text{пр. теч}}) : 2$$



Скорость катера по течению реки 23 км/ч. Найдите собственную скорость катера и его скорость против течения, если скорость течения реки 3 км/ч.

Дано:

скорость по течению	$v_{\text{по теч}} = 23$ км/ч
скорость реки	$v_{\text{реки}} = 3$ км/ч

Найти собственную скорость катера и его скорость против течения.

Решение.

Общая формула решения: $v_{\text{пр. теч}} = v_{\text{соб}} - v_{\text{реки}}$

1) $v_{\text{соб}} = 23 - 3 = 20$ (км/ч)	$v_{\text{соб}} = v_{\text{по теч}} - v_{\text{реки}}$
2) $v_{\text{пр. теч}} = 20 - 3 = 17$ (км/ч)	$v_{\text{пр. теч}} = v_{\text{соб}} - v_{\text{реки}}$

Замечание. $v_{\text{пр. теч}} = v_{\text{по теч}} - 2v_{\text{реки}}$

Ответ: $v_{\text{соб}} = 20$ км/ч, $v_{\text{пр. теч}} = 17$ км/ч.

ДРОБИ

Одну долю или несколько равных долей единицы называют *дробью*.

Дробь записывают так: $\frac{m}{n}$ $\to$ числитель, $\to$ знаменатель

Знаменатель дроби n показывает, на сколько равных долей разбита единица.

Числитель дроби m показывает, сколько равных долей единицы взято.

Например, дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{9}{5}$ читаются так: $\frac{1}{2}$ — одна вторая, или половина; $\frac{1}{3}$ — одна треть; $\frac{1}{4}$ — одна четвертая, или четверть; $\frac{5}{6}$ — пять шестых; $\frac{9}{5}$ — девять пятых

Замечание. При чтении дроби называют сначала ее числитель, а затем знаменатель.

Дробь можно получить следующими способами:

1. Делением единицы на равные части.

Например, 1 метр разделить на 5 частей: $1 : 5 = \frac{1}{5}$

2. В результате измерения.

Например: $2\frac{1}{10}$ м, $3\frac{20}{1000}$ кг

3. Делением двух натуральных чисел.

черта дроби } → a ← делимое (числитель)
черта деления } → b ← делитель (знаменатель)

Например, $5:10=\frac{5}{10}$, $2:3=\frac{2}{3}$

Дробь $\frac{a}{b}$ называется *правильной*, если $a<b$ (при этом $\frac{a}{b}<1$).

Например: $\frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{12}{151}, \frac{99}{100}, \ldots$ — правильные дроби

Дробь $\frac{a}{b}$ называется *неправильной*, если $a \ge b$ (при этом $\frac{a}{b} \ge 1$).

Примеры

1. Запишите дробью частные: $1:35$; $18:25$; $0:32$.

$1:35=\frac{1}{35}$; $18:25=\frac{18}{25}$; $0:32=\frac{0}{32}$

2. Запишите все правильные дроби со знаменателем 11.

Решение.

$\frac{1}{11}, \frac{2}{11}, \frac{3}{11}, \frac{4}{11}, \frac{5}{11},$
$\frac{6}{11}, \frac{7}{11}, \frac{8}{11}, \frac{9}{11}, \frac{10}{11}$

$\frac{a}{11}<1$, если $a=1, 2, 3, \ldots, 10$

3. Выпишите неправильные дроби из данных дробей:

$\frac{5}{3}, \frac{6}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{13}{10}, \frac{12}{5}, \frac{0}{3}$

Решение.

Выберем дроби, у которых числитель равен знаменателю или больше знаменателя:

$\frac{5}{3}, \frac{6}{6}, \frac{13}{10}, \frac{12}{5}$ — неправильные дроби | $\frac{a}{b} \geq 1$, если $a \geq b$

Проверь себя!

1. Запишите все правильные дроби со знаменателем 8.

Ответ: $\frac{1}{8}; \frac{2}{8}; \frac{3}{8}; \frac{4}{8}; \frac{5}{8}; \frac{6}{8}; \frac{7}{8}$.

2. Запишите все неправильные дроби со знаменателем 8, числитель которых меньше или равен 12 (не больше 12).

Ответ: $\frac{8}{8}; \frac{9}{8}; \frac{10}{8}; \frac{11}{8}; \frac{12}{8}$.

Смешанные дроби

Числа $2\frac{3}{7}, 5\frac{1}{20}, 6\frac{5}{3}, 100\frac{3}{10}$ называются *смешанными дробями*. Они состоят из *целой* и *дробной* частей; с помощью букв их можно записать так: $A\frac{m}{n}$, где A — целая часть (натуральное число), $\frac{m}{n}$ — дробная часть.

Например, в смешанной дроби $5\frac{1}{3}$ число 5 — целая часть, число $\frac{1}{3}$ — дробная часть

Алгоритм 42 Изображение дробей на числовой оси

① Начертите числовой луч Ox, выбрав единичный отрезок так, чтобы было удобно делить его на n равных частей, где n — знаменатель.

② Если дробь правильная, то разделите на n равных частей отрезок, принятый за единицу, на луче от 0 отложите m таких частей и поставьте точку, изображающую заданное число.

③ Если дробь смешанная, то отложите на числовом луче ее целую часть. Единичный отрезок, следующий за полученной на луче точкой (целым числом), разделите на n равных частей. Отложите правильную дробь, равную дробной части. Получите нужную точку, изображающую смешанную дробь.

Замечание. Числа, равные между собой, но имеющие разное написание, будут изображаться одной и той же точкой числовой оси.

Над осью: $\frac{1}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{9}{12}$, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{3}{4}$, $2\frac{3}{10}$, $2\frac{7}{10}$

Под осью: 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$, 2, $\frac{23}{10}$, $\frac{27}{10}$, 3, x

Равенство дробей

Две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ *равны*, если $a \cdot d = b \cdot c$.

Например: $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$, так как $3 \cdot 15 = 5 \cdot 9$; $\frac{10}{3} = \frac{20}{6}$, так как $10 \cdot 6 = 20 \cdot 3$

Замечание. Две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{am}{bm}$ равны, так как $a \cdot bm = b \cdot am$.

Например: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, так как $\frac{4}{6} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2}$

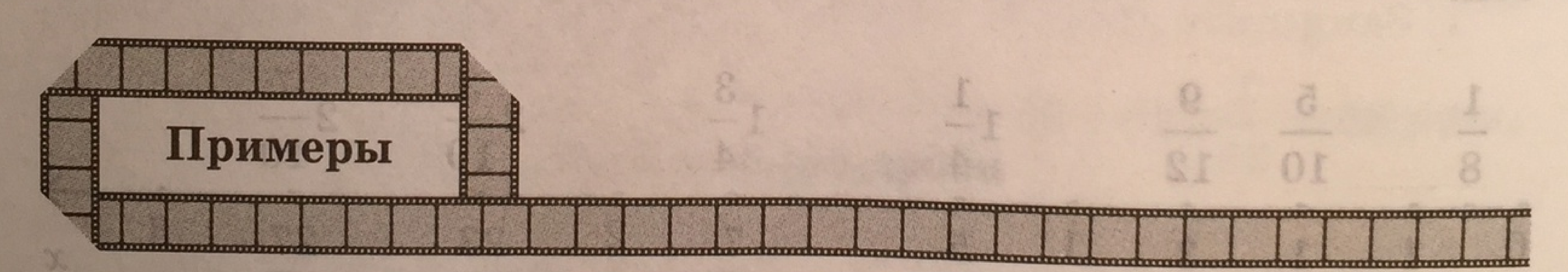
Сравнение дробей

Если дроби имеют *равные знаменатели*, то та дробь *больше*, числитель которой *больше:* $\frac{a}{b} > \frac{c}{b}$, где $a > c$.

Если дроби имеют *равные числители*, то та дробь *больше*, знаменатель которой *меньше:* $\frac{a}{b} > \frac{a}{c}$, где $b < c$.

Например: $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$, так как $5 > 3$; $\frac{8}{3} > \frac{8}{9}$, так как $3 < 9$.

Если дроби имеют *разные знаменатели* и *разные числители*, то для сравнения их надо привести либо к одному знаменателю, либо к одному числителю и сравнить.



1. Расположите в порядке возрастания дроби:

$$\frac{17}{41}, \frac{23}{41}, \frac{33}{41}, \frac{1}{41}, \frac{8}{41}, \frac{40}{41}, \frac{51}{41}, \frac{41}{41}$$

Назовите наименьшую и наибольшую дроби.

Решение.

Знаменатели дробей равны, поэтому сравним числители и расположим дроби по возрастанию числителей:

$$\frac{1}{41}, \frac{8}{41}, \frac{17}{41}, \frac{23}{41}, \frac{33}{41}, \frac{40}{41}, \frac{41}{41}, \frac{51}{41}$$

$\frac{1}{41}$ — наименьшая, $\frac{51}{41}$ — наибольшая дробь

2. Сравните дроби: а) $\frac{5}{7}$ и $\frac{4}{7}$; б) $\frac{16}{14}$ и $\frac{16}{7}$.

Решение.

а) $\frac{5}{7} > \frac{4}{7}$, так как $5 > 4$ | $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$, если $a > b$

б) $\frac{16}{14} < \frac{16}{7}$, так как $14 > 7$ | $\frac{a}{b} < \frac{a}{c}$, если $b > c$

3. Сравните смешанные дроби: а) $1\frac{6}{7}$ и $2\frac{1}{7}$; б) $5\frac{8}{9}$ и $5\frac{8}{10}$.

Решение.

а) $1\frac{6}{7} < 2\frac{1}{7}$, так как $1 < 2$

б) $5\frac{8}{9} > 5\frac{8}{10}$, так как $9 < 10$ | $\frac{a}{b} > \frac{a}{c}$, если $b < c$

Проверь себя!

Сравните числа: а) $\frac{9}{11}$ и $\frac{10}{11}$; б) $\frac{18}{19}$ и $\frac{18}{20}$; в) $8\frac{2}{5}$ и $7\frac{4}{5}$.

Ответ: а) $\frac{9}{11} < \frac{10}{11}$; б) $\frac{18}{19} > \frac{18}{20}$; в) $8\frac{2}{5} > 7\frac{4}{5}$.

Алгоритм 43 Выделение целой части из неправильной дроби

Пусть дана неправильная дробь $\frac{a}{b}$ $(a \geq b)$.

① Разделите a на b (с остатком $r < b$ или нацело).

Например: $\frac{16}{3} = 5$ (ост. 1)

Замечание. Если числитель нацело делится на знаменатель, то получится целое число.

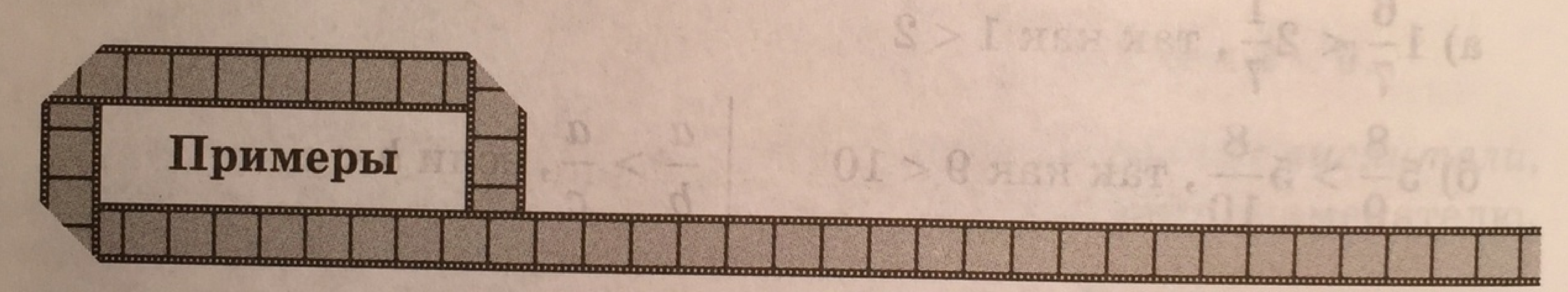
Например: $\frac{12}{4} = 3$; $\frac{100}{5} = 20$; $\frac{8}{8} = 1$

② Если деление с остатком, то неполное частное будет целой частью ответа.

③ Остаток от деления r станет числителем дробной части, а знаменатель останется прежним.

④ Запишите смешанную дробь, целая и дробная части которой найдены в п. 2 и 3.

Например: $\frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$



1. Выделите целую часть из дроби $\frac{45}{17}$.

Решение.

$\frac{45}{17} = 2\frac{11}{17}$ | 45 : 17 = 2 (ост. 11)

2. Запишите частное в виде дроби и выделите целую часть (если можно): а) 381 : 38; б) 4 : 15; в) 437 : 100.

Решение.

а) $381 : 38 = \frac{381}{38} = 10\frac{1}{38}$ | 381 : 38 = 10 (ост. 1)

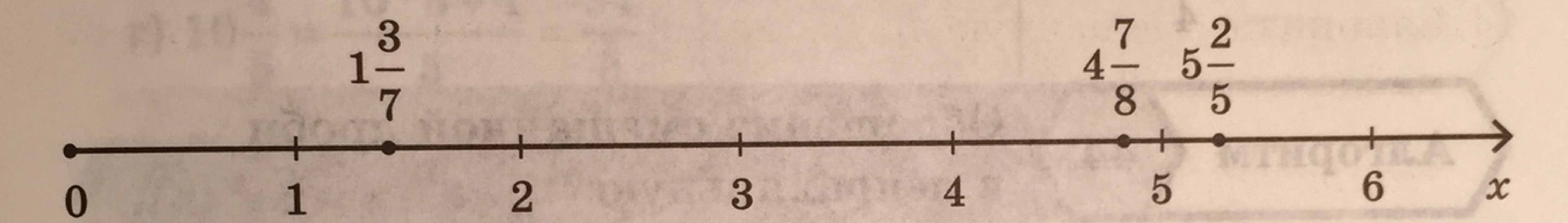
б) $4 : 15 = \frac{4}{15}$ | 4 : 15 = 0 (ост. 4)

в) $437 : 100 = \frac{437}{100} = 4\frac{37}{100}$ | 437 : 100 = 4 (ост. 37)

3. **Выясните, между какими двумя последовательными натуральными числами заключено дробное число: а) $5\frac{2}{5}$; б) $1\frac{3}{7}$; в) $4\frac{7}{8}$. Покажите решение на числовой оси.**

Решение.

а) $5 < 5\frac{2}{5} < 6$; б) $1 < 1\frac{3}{7} < 2$; в) $4 < 4\frac{7}{8} < 5$



Ответ: а) 5 и 6; б) 1 и 2; в) 4 и 5.

4. Запишите дробное число $6\frac{5}{3}$ смешанной дробью так, чтобы его дробная часть была правильной дробью.

Решение.

1) Выделите целую часть из дроби $\frac{5}{3}$, получите $\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$.

2) Сложите целые части (6 + 1 = 7) и припишите к числу 7 дробь $\frac{2}{3}$, получите $7\frac{2}{3}$.

Ответ: $7\frac{2}{3}$.

Проверь себя!

1. Запишите частное в виде дроби и выделите целую часть:

а) 205 : 120 б) 15 : 15 в) 576 : 100

Ответ: а) $1\frac{85}{120}$; б) 1; в) $5\frac{76}{100}$.

2. Между какими двумя последовательными натуральными числами заключено число: а) $3\frac{2}{5}$; б) $7\frac{8}{10}$?

Ответ: а) 3 и 4; б) 7 и 8.

3. Запишите дробное число $8\frac{15}{4}$ смешанной дробью так, чтобы его дробная часть была правильной дробью.

Ответ: $11\frac{3}{4}$.

Алгоритм 44. Обращение смешанной дроби в неправильную

① Умножьте знаменатель дроби на ее целую часть.

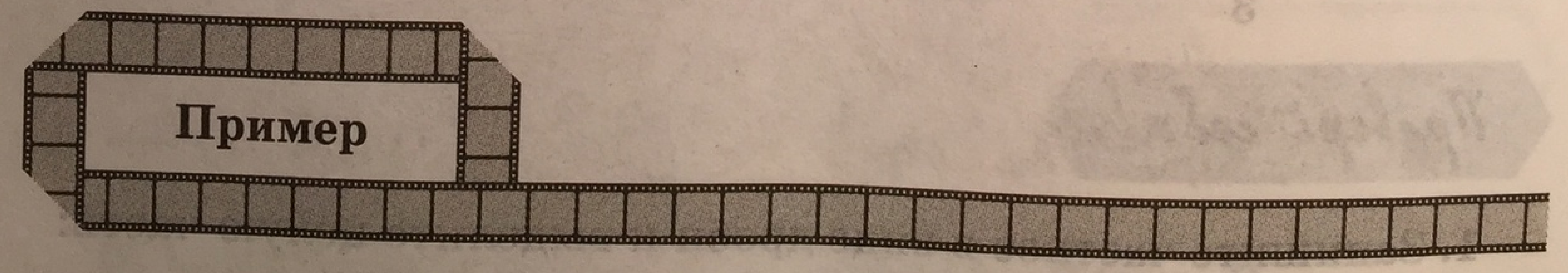
② К полученному произведению прибавьте числитель дробной части.

③ Полученную сумму запишите в числитель, а знаменатель дроби оставьте прежний.

Полезный совет

Удобно пользоваться схемой, указывающей порядок действий:

$$A\overset{+}{\nearrow}\!\underset{\cdot}{\nwarrow}\frac{m}{n} = \frac{An+m}{n}$$



Представьте в виде неправильной дроби число:

а) $3\frac{2}{7}$ б) $2\frac{1}{3}$ в) $1\frac{5}{11}$ г) $10\frac{4}{5}$

Решение.

а) $3\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 7+2}{7}=\frac{21+2}{7}=\frac{23}{7}$

б) $2\frac{1}{3}=\frac{2\cdot 3+1}{3}=\frac{7}{3}$

в) $1\frac{5}{11}=\frac{11\cdot 1+5}{11}=\frac{16}{11}$

г) $10\frac{4}{5}=\frac{10\cdot 5+4}{5}=\frac{54}{5}$

$$A\frac{m}{n}=\frac{An+m}{n}$$

Проверь себя!

Запишите в виде неправильной дроби число:

а) $1\frac{9}{10}$ б) $3\frac{7}{8}$ в) $15\frac{2}{5}$

Ответ: а) $\frac{19}{10}$; б) $\frac{31}{8}$; в) $\frac{77}{5}$.

Основное свойство дроби

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot m}{b\cdot m} \quad \text{или} \quad \frac{a}{b}=\frac{a:m}{b:m},\ m\neq 0$$

Если числитель и знаменатель дроби умножить на одно и то же не равное нулю число или разделить на их общий делитель, то получим дробь, равную данной.

Например: $\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}=\frac{10}{15}$; $\frac{12}{18}=\frac{12:6}{18:6}=\frac{2}{3}$

(заметим, что $\frac{2}{3}$ — несократимая дробь, НОД(2; 3) = 1)

Дроби $\frac{2}{3}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{18}$ равны, но их запись разная. На числовом луче все три дроби $\frac{2}{3}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{18}$ изображаются одной точкой.

Приведение дробей к новому знаменателю

Замена дроби равной ей дробью с новыми числителем и знаменателем (кратными заданным) называется *приведением дроби к новому знаменателю*.

Число, на которое умножают числитель и знаменатель данной дроби, называют *дополнительным множителем* дроби.

Алгоритм 45 Приведение дроби к новому знаменателю

Пусть дана несократимая дробь и ее нужно привести к новому знаменателю, кратному знаменателю данной дроби.

① Разделите новый знаменатель на знаменатель данной дроби, получите дополнительный множитель.

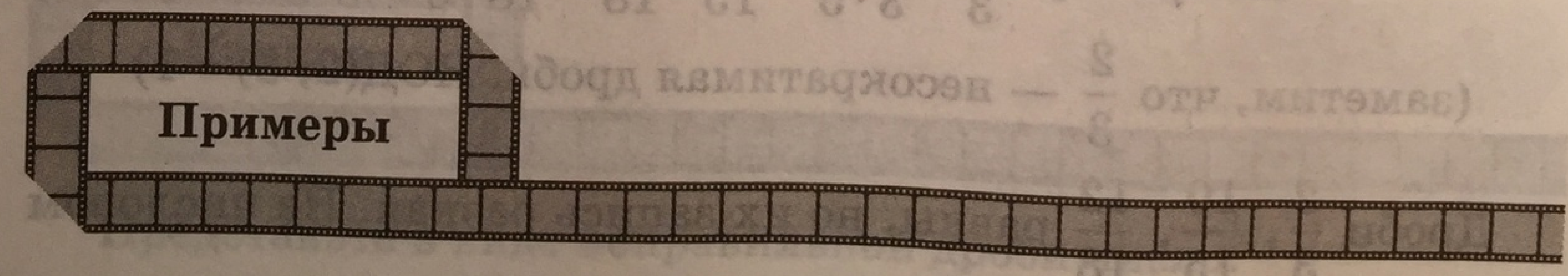
② Примените основное свойство дроби, для чего умножьте числитель и знаменатель дроби на ее дополнительный множитель; получите дробь, равную данной, с новым знаменателем.

Например, для приведения дроби $\frac{3}{4}$ к знаменателю 12 поступим так:

1) найдем дополнительный множитель (12 : 4 = 3)

2) умножим числитель и знаменатель дроби $\frac{3}{4}$ на 3, получим

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$$



1. Приведите дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$ к знаменателю 12.

Решение.

1) Чтобы найти дополнительные множители к каждой дроби, разделите 12 на знаменатель каждой дроби:

$$12 : 2 = 6;\ 12 : 3 = 4;\ 12 : 4 = 3;\ 12 : 6 = 2$$

2) Умножьте числитель и знаменатель каждой дроби на ее дополнительный множитель:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 6}{2 \cdot 6} = \frac{6}{12};\quad \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{4}{12};$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3}{12};\quad \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{10}{12}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$$

Ответ: $\frac{6}{12}, \frac{4}{12}, \frac{3}{12}, \frac{10}{12}$.

2. Сравните дроби $\frac{3}{4}$ и $\frac{4}{5}$.

Решение.

1) Для того чтобы привести дроби к одному знаменателю, найдите НОК(4; 5) = 20

2) Найдите дополнительные множители:

$20 : 4 = 5;\ 20 : 5 = 4$

3) Примените основное свойство дроби:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20};\quad \frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{16}{20}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$$

4) Сравните результаты:

$\frac{15}{20} < \frac{16}{20}$, тогда и $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$ (как равные им дроби)

Ответ: $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$.

3. Выразите в сотых долях дроби: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{19}{50}$, $\frac{23}{25}$.

Решение.

$\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 50}{2\cdot 50}=\frac{50}{100}$; $\frac{2}{5}=\frac{2\cdot 20}{5\cdot 20}=\frac{40}{100}$; $\frac{3}{20}=\frac{3\cdot 5}{20\cdot 5}=\frac{15}{100}$;

$\frac{17}{20}=\frac{17\cdot 5}{20\cdot 5}=\frac{85}{100}$; $\frac{19}{50}=\frac{19\cdot 2}{50\cdot 2}=\frac{38}{100}$; $\frac{23}{25}=\frac{23\cdot 4}{25\cdot 4}=\frac{92}{100}$

Ответ: $\frac{5}{100}$, $\frac{40}{100}$, $\frac{15}{100}$, $\frac{85}{100}$, $\frac{38}{100}$, $\frac{92}{100}$.

4. Найдите a, если $\frac{a}{4}=\frac{30}{40}$.

Решение.

Найдем, во сколько раз знаменатель второй дроби больше: $40 : 4 = 10$. Значит, во столько же раз увеличили числитель, т. е. $a \cdot 10 = 30$, следовательно, $a = 30 : 10$, откуда $a = 3$.

Ответ: $a = 3$.

Проверь себя!

1. Найдите b, если $\frac{12}{15}=\frac{36}{b}$. *Ответ:* $b = 45$.

2. Сравните дроби $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{7}$. *Ответ:* $\frac{3}{5} > \frac{4}{7}$.

Сокращение дроби

Если числитель и знаменатель дроби имеют общий множитель, то говорят, что дробь можно *сократить* на этот множитель, т. е. разделить на него и числитель, и знаменатель. При этом

получится дробь, равная данной, но с меньшим в m раз числителем и знаменателем:

$$\frac{a:m}{b:m} = \frac{a}{b}, m \neq 0, b \neq 0$$

Алгоритм 46 Сокращение дроби (I способ)

① Разложите числитель и знаменатель дроби на простые множители.

② Разделите числитель и знаменатель дроби на общие делители, применив основное свойство дроби.

③ Перемножьте оставшиеся множители в числителе дроби и в знаменателе дроби, получите в ответе несократимую дробь.

Например:

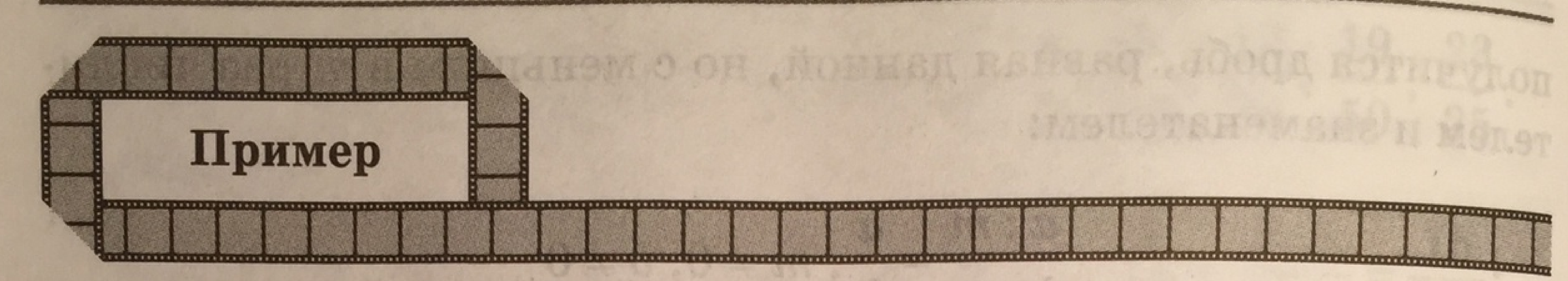
$$\frac{4}{6} = \frac{2 \cdot \cancel{2}^1}{3 \cdot \cancel{2}_1} = \frac{2}{3}; \qquad \frac{45}{75} = \frac{\cancel{3}^1 \cdot 3 \cdot \cancel{5}^1}{\cancel{5}_1 \cdot \cancel{3}_1 \cdot 5} = \frac{3}{5}$$

Алгоритм 47 Сокращение дроби (II способ)

① Найдите наибольший общий делитель числителя и знаменателя дроби.

② Разделите числитель и знаменатель дроби на их наибольший общий делитель.

③ Перемножьте оставшиеся множители в числителе дроби и в знаменателе дроби, получите несократимую дробь.



Сократите дробь:

а) $\frac{28}{36}$

б) $\frac{28}{56}$

в) $\frac{12}{16}$

Решение.

а) $\frac{28}{36} = \frac{28:4}{36:4} = \frac{7}{9}$ | НОД(28; 36) = 4

б) $\frac{28}{56} = \frac{1}{2}$ | НОД(28; 56) = 28

в) $\frac{12}{16} = \frac{12:4}{16:4} = \frac{3}{4}$ | НОД(12; 16) = 4

Замечание. Можно подписывать НОД(a; b) = m над дробью и устно выполнять действие деления числителя и знаменателя дроби на m, например:

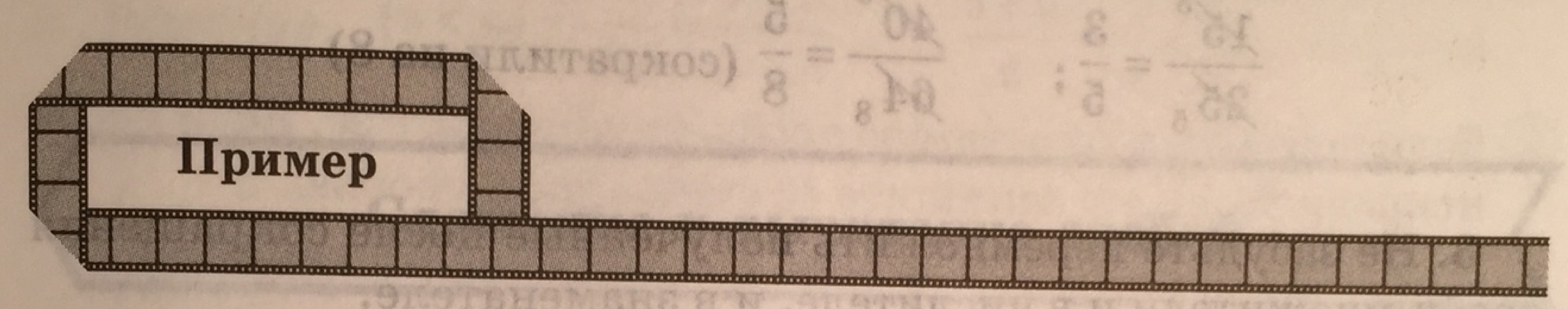
$\overset{18}{\frac{72}{90}} = \frac{4}{5}$ | НОД(72; 90) = 18

Алгоритм 48 Сокращение дроби (III способ)

① Найдите устно любой общий делитель числителя и знаменателя дроби и примените основное свойство дроби.

② В полученной дроби снова найдите общий делитель числителя и знаменателя и повторите п. 1.

③ Делите числитель и знаменатель дроби на общие множители до тех пор, пока не получите несократимую дробь.

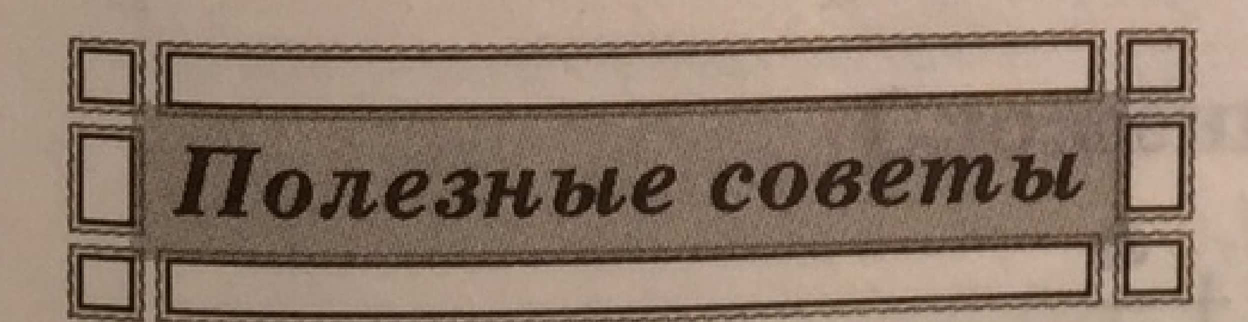


Сократить дробь:

а) $\frac{100}{60}$

б) $\frac{18 \cdot 15}{24 \cdot 35}$

$$а)\ \frac{\overset{10}{\cancel{100}}}{60} = \frac{\overset{2}{\cancel{10}}}{6} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3};\qquad б)\ \frac{\overset{2}{\cancel{18}} \cdot \overset{5}{\cancel{15}}}{24 \cdot 35} = \frac{9 \cdot \overset{3}{\cancel{3}}}{12 \cdot 7} = \frac{9 \cdot 1}{4 \cdot 7} = \frac{9}{28}$$



1. При зачеркивании делителей пишите результат от деления над этим числом (или под ним), иначе можно потерять числитель, когда он равен 1.

Например:

$$\frac{10}{30} = \frac{\cancel{10}^{1}}{\cancel{10}_{1} \cdot 3} = \frac{1}{3};\qquad \frac{7}{77} = \frac{\cancel{7}^{1}}{\cancel{7}_{1} \cdot 11} = \frac{1}{11}$$

2. Можно не писать наибольший общий делитель над числом, а устно выполнять деление числителя и знаменателя на общий делитель, зачеркнув числа в числителе и знаменателе, записать частные от их деления на этот делитель.

Например:

$$\frac{\not{15}^{\,3}}{\not{25}_{\,5}} = \frac{3}{5}; \qquad \frac{\not{40}^{\,5}}{\not{64}_{\,8}} = \frac{5}{8} \text{ (сократили на 8)}$$

3. Не забудьте перемножить полученные после сокращения дроби множители и в числителе, и в знаменателе.

Проверь себя!

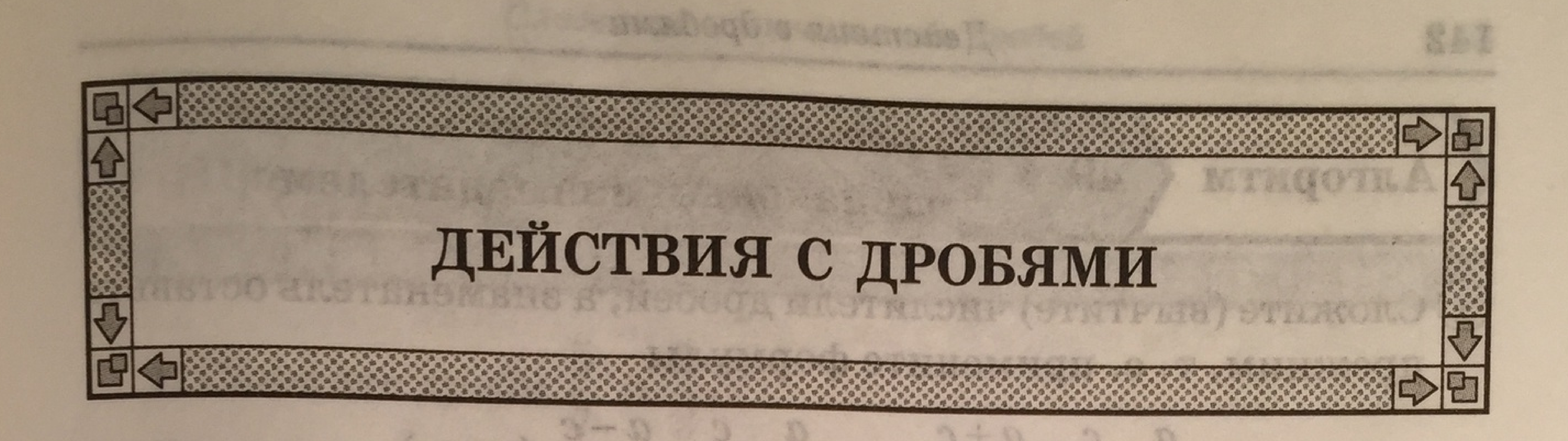
Сократите дроби:

а) $\frac{21}{28}$

б) $\frac{24 \cdot 25}{48 \cdot 125}$

в) $\frac{105}{15}$

Ответ: а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{1}{10}$; в) 7.



ДЕЙСТВИЯ С ДРОБЯМИ

Сложение и вычитание дробей

Законы сложения и вычитания дробей аналогичны соответствующим законам сложения и вычитания натуральных чисел.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$

(переместительный закон)

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{m}{n}=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{m}{n}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{m}{n}\right)$$

(сочетательный закон)

Сложение и вычитание с нулем

$$\frac{a}{b}+0=\frac{a}{b}, \qquad \frac{a}{b}-0=\frac{a}{b}$$

Свойства вычитания

$$\frac{a}{b}-\left(\frac{c}{d}+\frac{m}{n}\right)=\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)-\frac{m}{n}=\left(\frac{a}{b}-\frac{m}{n}\right)-\frac{c}{d}$$

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)-\frac{m}{n}=\left(\frac{a}{b}-\frac{m}{n}\right)+\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}-\frac{m}{n}\right)$$

Алгоритм 49. Сложение и вычитание дробей с одинаковым знаменателем

① Сложите (вычтите) числители дробей, а знаменатель оставьте прежним, т. е. примените формулы

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}, \qquad \frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b} \quad (a>c)$$

② Если получили сократимую дробь, то сократите ее. Если дробь неправильная, то запишите ее смешанной дробью.

Например, записать сложение и вычитание можно так:

1) $\frac{2}{15}+\frac{4}{15}=\frac{2+4}{15}=\frac{\overset{3}{6}}{15}=\frac{2}{5}$ $\qquad \frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$

2) $\frac{7}{9}-\frac{4}{9}=\frac{7-4}{9}=\frac{\overset{3}{3}}{9}=\frac{1}{3}$ $\qquad \frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$

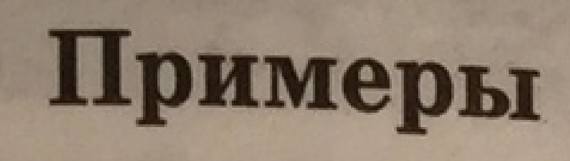
Алгоритм 50. Сложение и вычитание дробей с разными взаимно простыми знаменателями

Выполните действие $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ или $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$, если НОД(b; d) = 1.

① Найдите наименьший общий знаменатель дробей, равный наименьшему общему кратному их знаменателей. (Заметим, что НОК взаимно простых чисел равен их произведению.) НОК(b; d) = bd, если НОД(b; d) = 1.

② Приведите каждую дробь к общему знаменателю, используя основное свойство дроби.

③ Сложите или вычтите дроби с общим знаменателем, пользуясь алгоритмом 49.



1. Сложите дроби $\frac{5}{7}$ и $\frac{2}{3}$.

Решение.

$$\frac{5^{(3}}{7}+\frac{2^{(7}}{3}=\frac{5\cdot 3}{7\cdot 3}+\frac{2\cdot 7}{3\cdot 7}=\frac{15}{21}+\frac{14}{21}=\frac{15+14}{21}=\frac{29}{21}=1\frac{8}{21}$$

Ответ: $1\frac{8}{21}$.

2. Найдите разность дробей $\frac{6}{11}$ и $\frac{5}{13}$.

Решение.

$$\frac{6^{(13}}{11}-\frac{5^{(11}}{13}=\frac{6\cdot 13}{11\cdot 13}-\frac{5\cdot 11}{13\cdot 11}=\frac{78-55}{143}=\frac{23}{143}$$

Ответ: $\frac{23}{143}$.

Алгоритм 51 Сложение и вычитание дробей, знаменатели которых — кратные числа

Пусть даны дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{b\cdot n}$, которые нужно сложить (или вычесть).

① Найдите общий знаменатель дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{b\cdot n}$ — он равен $b\cdot n$.

Например, общий знаменатель дробей $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{15}$ равен 15

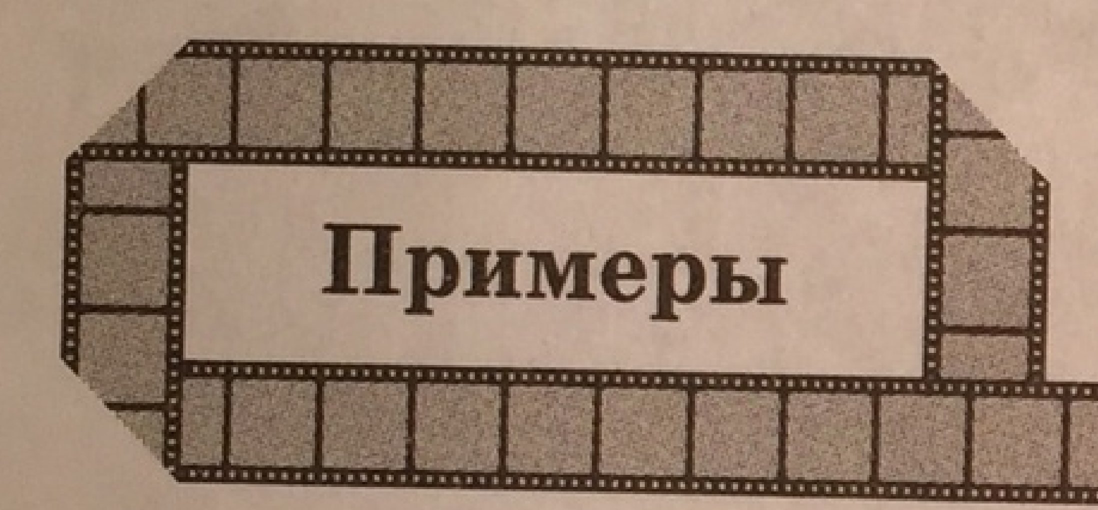
② Разделите bn на b и найдите n — дополнительный множитель.

③ Умножьте числитель и знаменатель дроби $\frac{a}{b}$ на n, получите $\frac{a \cdot n}{b \cdot n}$.

④ Сложите или вычтите дроби с общим знаменателем по алгоритму 49.

Например:

$$\frac{1^{(5}}{3} + \frac{2}{15} = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 5} + \frac{2}{15} = \frac{5}{15} + \frac{2}{15} = \frac{7}{15}$$



Примеры

1. Сложите дроби: $\frac{3}{5} + \frac{7}{10} + \frac{1}{2}$.

Решение.

$$\frac{3^{(2}}{5} + \frac{7^{(1}}{10} + \frac{1^{(5}}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 5} + \frac{7}{10} + \frac{5}{2 \cdot 5} =$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{7}{10} + \frac{5}{10} = \frac{6+7+5}{10} = \frac{18}{10} =$$

$$= 1\frac{\overset{2}{8}}{10} = 1\frac{4}{5}$$

НОК(5; 10; 2) = 10

$$\frac{a}{b \cdot n} + \frac{c^{(n}}{b} = \frac{a + c \cdot n}{b \cdot n}$$

2. Найдите разность: а) $\frac{7}{12} - \frac{1}{2}$; б) $\frac{35}{48} - \frac{5}{8}$.

Решение.

а) $\frac{7}{12} - \frac{1^{(6}}{2} = \frac{7}{12} - \frac{6}{12} = \frac{1}{12}$ НОК(12; 2) = 12

б) $\frac{35}{48} - \frac{5^{(6}}{8} = \frac{35}{48} - \frac{30}{48} = \frac{35-30}{48} = \frac{5}{48}$ НОК(48; 8) = 48

Проверь себя!

1. Сложите дроби: а) $\frac{2}{15}+\frac{7}{15}$; б) $\frac{7}{8}+\frac{3}{4}$; в) $\frac{3}{5}+\frac{2}{3}$.

Ответ: а) $\frac{3}{5}$; б) $1\frac{5}{8}$; в) $1\frac{4}{15}$.

2. Найдите разность: а) $\frac{9}{13}-\frac{4}{13}$; б) $\frac{5}{18}-\frac{2}{9}$; в) $\frac{5}{6}-\frac{2}{5}$.

Ответ: а) $\frac{5}{13}$; б) $\frac{1}{18}$; в) $\frac{13}{30}$.

Алгоритм 52. Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями

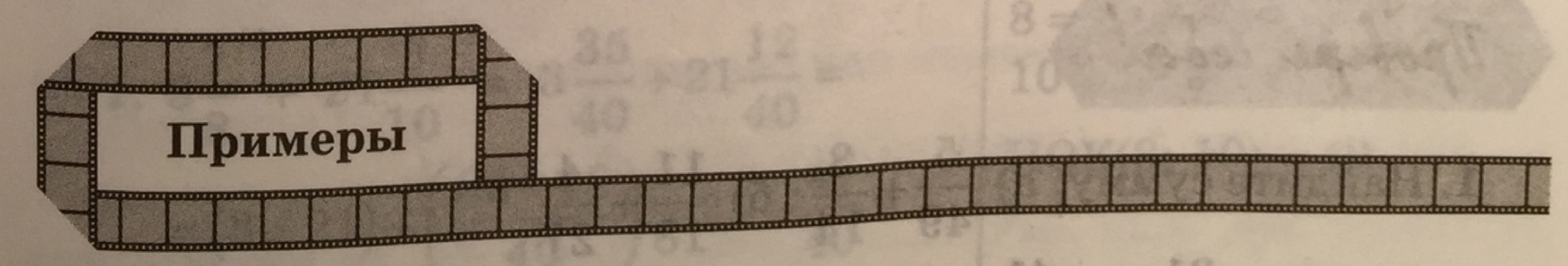
Выполните действие $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ или $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$.

① Найдите наименьшее общее кратное знаменателей, которое будет наименьшим общим знаменателем дробей, по алгоритму 35.

② Напишите дополнительные множители к каждой дроби.

③ Умножьте числитель каждой дроби на ее дополнительный множитель, а в знаменателе каждой дроби запишите общий знаменатель.

④ Сложите или вычтите дроби с одинаковыми знаменателями.



1. Сложите дроби $\frac{5}{12}$ и $\frac{14}{15}$.

Решение.

$$\frac{5}{12}^{(5} + \frac{14}{15}^{(4} = \frac{25}{60} + \frac{56}{60} = \frac{25+56}{60} =$$

$$= \frac{81}{60} = \frac{\cancel{3}^1 \cdot 27}{\cancel{3}_1 \cdot 20} = \frac{27}{20} = 1\frac{7}{20}$$

$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$	5
$15 = 3 \cdot 5$	$2 \cdot 2 = 4$

$12 \cdot 5 = 60$ — общий знаменатель

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

2. Найдите разность $\frac{4}{35} - \frac{3}{28}$.

Решение.

$$\frac{4}{35}^{(4} - \frac{3}{28}^{(5} = \frac{16}{140} - \frac{15}{140} = \frac{1}{140}$$

$35 = 5 \cdot 7$	$2 \cdot 2 = 4$
$28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$	5

$28 \cdot 5 = 140$ — общий знаменатель

3. Вычислите: $\left(\frac{7}{8} + \frac{14}{15}\right) + \frac{1}{8}$.

Решение.

$$\left(\frac{7}{8} + \frac{14}{15}\right) + \frac{1}{8} = \left(\frac{7}{8} + \frac{1}{8}\right) + \frac{14}{15} = \frac{8}{8} + \frac{14}{15} = 1\frac{14}{15}$$

$(a + b) + c =$
$= (a + c) + b$

$$\frac{8}{8} = 1$$

Ответ: $1\frac{14}{15}$.

Проверь себя!

1. Найдите сумму: а) $\frac{5}{49} + \frac{3}{14}$; б) $\frac{11}{18} + \frac{4}{27}$.

Ответ: а) $\frac{31}{98}$; б) $\frac{41}{54}$.

2. Найдите разность: а) $\frac{19}{36}-\frac{5}{24}$; б) $\frac{23}{72}-\frac{15}{64}$.

Ответ: а) $\frac{23}{72}$; б) $\frac{49}{576}$.

Алгоритм 53 Сложение смешанных дробей

Выполните действие $A\frac{m}{n}+B\frac{a}{b}$.

① Приведите дробные части данных чисел к наименьшему общему знаменателю.

② Сложите сначала целые, а затем дробные части с общим знаменателем.

③ Если дробная часть результата сложения (п. 2) — неправильная дробь, то выделите в ней целую часть и прибавьте к целой части (из п. 2), получив целую часть ответа, а полученная правильная дробь будет дробной частью ответа.

Например:

$$39\frac{5^{(3}}{6}+12\frac{8^{(2}}{9}=51\frac{15+16}{18}=51\frac{31}{18}=51+1\frac{13}{18}=52\frac{13}{18}$$

Примеры

Выполните действия **(1—2).**

1. $3\frac{7^{(5}}{8}+21\frac{3^{(4}}{10}=3\frac{35}{40}+21\frac{12}{40}=$

$=(3+21)+\left(\frac{35+12}{40}\right)=24+\frac{47}{40}=$

$=24+1\frac{7}{40}=25\frac{7}{40}$

$8=2\cdot2\cdot2 \quad |\cdot 5$

$10=2\cdot5 \quad |\cdot 4$

НОК(8; 10) = 40

2. $1\frac{5}{6}+\frac{1}{17}+\frac{16}{17}=1\frac{5}{6}+\left(\frac{1}{17}+\frac{16}{17}\right)=$

$=1\frac{5}{6}+\frac{17}{17}=1\frac{5}{6}+1=2\frac{5}{6}$

$a+b+c=a+(b+c)$

Проверь себя!

Запишите выражение: «К сумме чисел $3\frac{8}{15}$ и $\frac{7}{16}$ прибавить сумму чисел $\frac{7}{15}$ и $2\frac{1}{16}$». Вычислите значение этого выражения с помощью законов сложения.

Ответ: $6\frac{1}{2}$.

Попробуй-ка реши!

Найдите сумму четырех чисел, если b — первое число, а каждое следующее на a больше предыдущего. Вычислите при $a=3\frac{2}{5}$, $b=\frac{4}{5}$.

Ответ: $23\frac{3}{5}$.

Алгоритм 54 Вычитание правильной дроби из натурального числа

Выполните вычитание $A-\frac{a}{b}$ $(a<b)$.

① Займите в уменьшаемом одну единицу и запишите ее в виде дроби $\frac{b}{b}$ (где b — знаменатель данной дроби).

Например, если вычисляем разность $4-\frac{2}{15}$, то пишем, что $4=3\frac{15}{15}$

② Вычтите из полученной дроби (п. 1) данную правильную дробь.

Например: $4-\frac{2}{15}=3\frac{15}{15}-\frac{2}{15}=3+\left(\frac{15-2}{15}\right)$

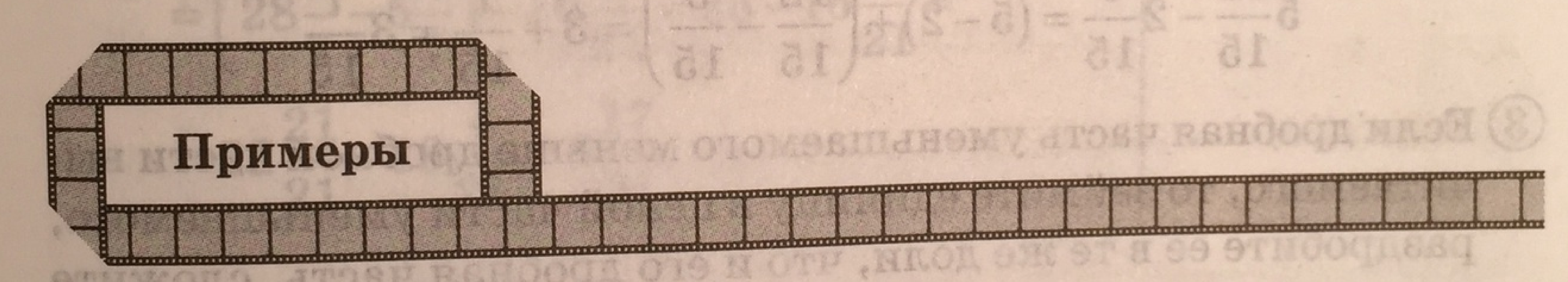
③ Полученная разность дробей будет дробной частью ответа, оставшееся целое число — целой частью.

④ Прибавьте к целой части дробную часть, получите ответ.

Например:

$$4-\frac{2}{15}=3\frac{15}{15}-\frac{2}{15}=3+\left(\frac{15-2}{15}\right)=3+\frac{13}{15}=3\frac{13}{15}$$

Замечание. Промежуточные вычисления можно выполнять устно.



Вычислите (1—2).

1. $1-\frac{100}{101}=\frac{101-100}{101}=\frac{1}{101}$ | $1=\frac{101}{101}$

2. $5-\frac{3}{4}=4\frac{4}{4}-\frac{3}{4}=4\frac{4-3}{4}=4\frac{1}{4}$

Проверь себя!

Найдите разность чисел:

а) $1-\frac{7}{9}$ б) $1-\frac{0}{5}$ в) $3-\frac{1}{3}$ г) $4-\frac{2}{7}$

Ответ: а) $\frac{2}{9}$; б) 1; в) $2\frac{2}{3}$; г) $3\frac{5}{7}$.

Алгоритм 55 Вычитание смешанных дробей

① Приведите дробные части к общему знаменателю.

Например:

$$5\frac{4}{5}-2\frac{1}{3}=5\frac{12}{15}-2\frac{5}{15}$$

② Если дробная часть вычитаемого меньше дробной части уменьшаемого, то из целой части уменьшаемого вычтите целую часть вычитаемого, а из дробной части вычтите дробную и сложите результат; получите ответ.

Например:

$$5\frac{12}{15}-2\frac{5}{15}=(5-2)+\left(\frac{12}{15}-\frac{5}{15}\right)=3+\frac{7}{15}=3\frac{7}{15}$$

③ Если дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого, то займите единицу в целой части уменьшаемого, раздробите ее в те же доли, что и его дробная часть, сложите ее с дробной частью уменьшаемого, вычитайте, как в п. 2.

Например, можно произвести вычитание так:

1) $2\frac{3}{7}-\frac{4}{7}=1\frac{7+3}{7}-\frac{4}{7}=1\frac{10}{7}-\frac{4}{7}=1\frac{6}{7}$ | $1=\frac{7}{7}$

2) $3\frac{1}{3}-1\frac{1}{2}=3\frac{2}{6}-1\frac{3}{6}=2+\left(\frac{6}{6}+\frac{2}{6}\right)-1\frac{3}{6}=$ | $\frac{1}{3}=\frac{2}{6},\ \frac{1}{2}=\frac{3}{6}$

$=2\frac{6+2}{6}-1\frac{3}{6}=2\frac{8}{6}-1\frac{3}{6}=1\frac{5}{6}$

Замечание. В случае целого вычитаемого действие производится проще (из целой части уменьшаемого вычитается целое вычитаемое).

Например: $3\frac{5}{6}-2=1\frac{5}{6}$

Примеры

Выполните действия (1—2).

1. $4\frac{5^{(3}}{7} - 2\frac{20}{21} = 4\frac{15}{21} - 2\frac{20}{21} =$

$= 3\frac{15+21}{21} - 2\frac{20}{21} = 1\frac{36-20}{21} = 1\frac{16}{21}$

ОЗ = 21
21 : 7 = 3 — доп. множитель

2. $28\frac{3}{7} - \left(16\frac{4}{21} + 5\frac{3}{7}\right) =$

$= \left(28\frac{3}{7} - 5\frac{3}{7}\right) - 16\frac{4}{21} = 23 - 16\frac{4}{21} =$

$= 22\frac{21}{21} - 16\frac{4}{21} = 6\frac{17}{21}$

$a - (b + c) =$
$= (a - c) - b$

Проверь себя!

Выполните действия: а) $5\frac{3}{28} - 2\frac{2}{21}$; б) $14\frac{7}{9} - \left(5\frac{2}{3} + 4\frac{7}{9}\right)$.

Ответ: а) $3\frac{1}{84}$; б) $4\frac{1}{3}$.

Умножение дробей

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$ $\frac{1}{a} \cdot a = 1$ $\frac{a}{b} \cdot 0 = 0$

$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$ $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ $\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$

Законы умножения дробей такие же, как и законы умножения натуральных чисел.

Законы умножения дробей

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$$

(переместительный)

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n}=\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n}\right)$$

(сочетательный)

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}+\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n} \qquad \left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}-\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n}$$

(распределительный)

Алгоритм 56 Умножение дробей

Выполните действие $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$.

① Запишите дробь, в числителе которой произведение числителей данных дробей, а в знаменателе произведение их знаменателей (не перемножая).

Например:

$$\frac{2}{15}\cdot\frac{9}{11}=\frac{2\cdot 9}{15\cdot 11} \qquad \Bigg| \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Разложите на множители, если возможно, каждый множитель числителя и знаменателя.

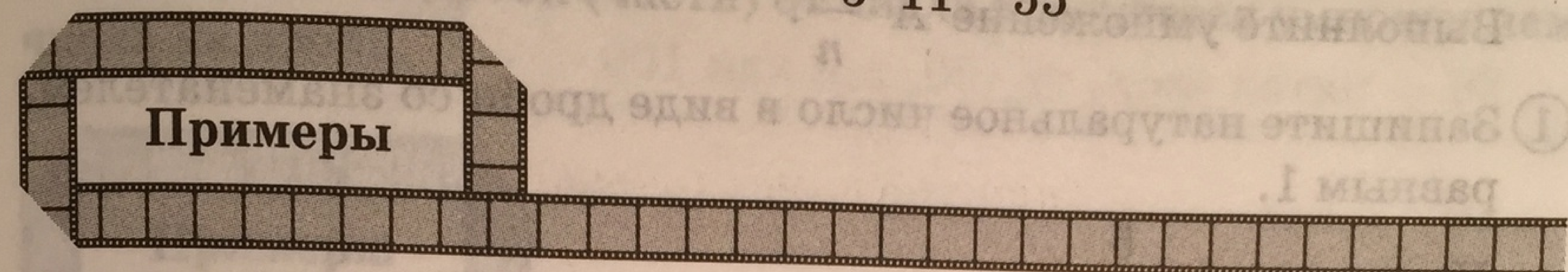
② Сократите дробь (если возможно), алгоритмы 46—48.

Например:

$$\frac{2\cdot 9}{15\cdot 11}=\frac{2\cdot 3\cdot \cancel{3}^{1}}{\cancel{3}_{1}\cdot 5\cdot 11}=\frac{2\cdot 3}{5\cdot 11}$$

③ **Перемножьте оставшиеся множители в числителе и в знаменателе дроби, получите искомую дробь.**

Например: $\dfrac{2\cdot 3}{5\cdot 11}=\dfrac{6}{55}$



Примеры

Вычислите:

а) $\dfrac{5}{14}\cdot\dfrac{12}{25}$ б) $\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{6}{5}$ в) $\dfrac{42}{75}\cdot\dfrac{9}{70}\cdot\dfrac{10}{81}$

Решение.

а) $\dfrac{15}{14}\cdot\dfrac{12}{25}=\dfrac{\cancel{15}^{3}\cdot\cancel{12}^{6}}{\cancel{14}_{7}\cdot\cancel{25}_{5}}=\dfrac{18}{35}$

б) $\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{6}{5}=1$

в) $\dfrac{42}{75}\cdot\dfrac{9}{70}\cdot\dfrac{10}{81}=\dfrac{42}{75}\cdot\left(\dfrac{\cancel{9}^{1}\cdot\cancel{10}^{1}}{\cancel{70}_{7}\cdot\cancel{81}_{9}}\right)=$

$=\dfrac{42}{75}\cdot\dfrac{1}{7\cdot 9}=\dfrac{42\cdot 1}{75\cdot 7\cdot 9}=\dfrac{2\cdot\cancel{3}^{1}\cdot\cancel{7}^{1}}{\cancel{3}_{1}\cdot 5\cdot 5\cdot\cancel{7}_{1}\cdot 9}=\dfrac{2}{225}$

$\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\cdot c}{b\cdot d}$

$\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{a}=1$

$\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}\cdot\dfrac{m}{n}=$

$=\dfrac{a}{b}\cdot\left(\dfrac{c}{d}\cdot\dfrac{m}{n}\right)$

Внимание! **Нельзя сокращать дроби, записанные не под общей чертой (нарушается основное свойство дроби).**

Проверь себя!

Найдите произведение дробей:

а) $\dfrac{18}{35}\cdot\dfrac{15}{27}\cdot 1$ б) $\dfrac{7}{8}\cdot\dfrac{8}{7}\cdot 0$ в) $\dfrac{49}{64}\cdot\dfrac{8}{7}\cdot\dfrac{5}{14}$

Ответ: 1) $\dfrac{2}{7}$; б) 0; в) $\dfrac{5}{16}$.

Алгоритм 57 Умножение натурального числа на дробь

Выполните умножение $A \cdot \frac{m}{n}$.

① Запишите натуральное число в виде дроби со знаменателем, равным 1.

Например: $5 = \frac{5}{1}$

② Умножьте дробь на дробь $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{1 \cdot c} = \frac{a \cdot b}{c}$ с помощью предыдущего алгоритма.

Например: $5 \cdot \frac{3}{10} = \frac{5}{1} \cdot \frac{3}{10} = \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

Замечание. Можно при умножении применять формулу

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$$

Например:

1) $5 \cdot \frac{3}{10} = \frac{\cancel{5}^{1} \cdot 3}{2 \cdot \cancel{5}_{1}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

2) $\frac{4}{7} \cdot 14 = \frac{4 \cdot 14}{7} = \frac{8}{1} = 8$

$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$

$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$

Проверь себя!

Найдите произведение:

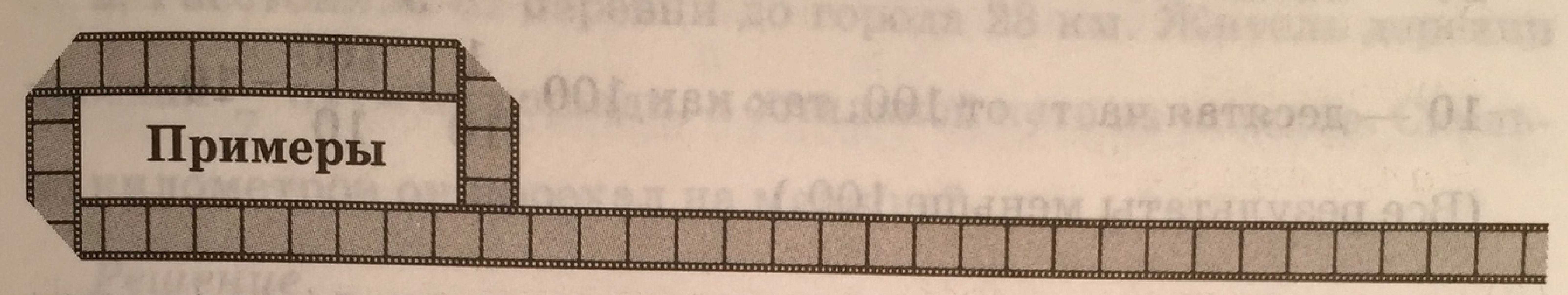
а) $5 \cdot \frac{4}{15}$ б) $\frac{7}{18} \cdot 6$ в) $\frac{9}{4} \cdot 8$

Ответ: а) $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$; б) $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$; в) 18.

Нахождение дроби от числа

Чтобы найти часть от числа, выраженную дробью, нужно это число умножить на данную дробь.

Нахождение дроби (части) от числа заменяется умножением числа на дробь.



1. Найдите $\frac{5}{8}$ от 200.

Решение.

$$200 \cdot \frac{5}{8} = \frac{200 \cdot 5}{8} = \frac{25 \cdot 5}{1} = 125 \qquad \left|\; A \cdot \frac{m}{n} = \frac{A \cdot m}{n}\right.$$

Ответ: 125.

2. Найдите $\frac{2}{5}$ от 20.

Решение.

$$20 \cdot \frac{2}{5} = \frac{20 \cdot 2}{5} = \frac{4 \cdot 2}{1} = 8 \qquad \left|\; a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}\right.$$

Ответ: 8.

Полезные советы

1. При умножении числа **на правильную дробь** получается **результат, меньший**, чем данное число, поэтому проверяйте, нет ли ошибки в ответе.

Полезно знать:

50 — половина от 100, так как $100 \cdot \frac{1}{2} = \frac{100}{2} = 50$

25 — четверть от 100, так как $100 \cdot \frac{1}{4} = \frac{100}{4} = 25$

75 — три четверти от 100, так как $100 \cdot \frac{3}{4} = \frac{100 \cdot 3}{4} = 75$

20 — пятая часть от 100, так как $100 \cdot \frac{1}{5} = \frac{100}{5} = 20$

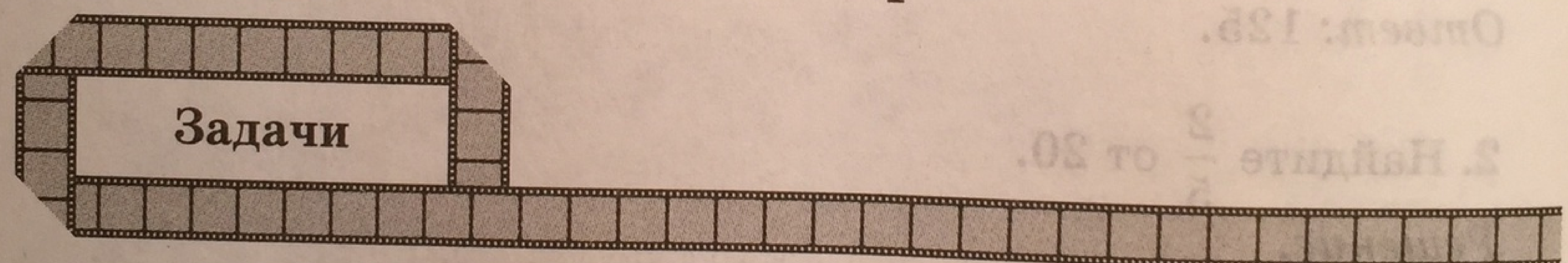
10 — десятая часть от 100, так как $100 \cdot \frac{1}{10} = \frac{100}{10} = 10$

(Все результаты меньше 100.)

2. При умножении числа **на неправильную дробь** получается **результат, больший,** чем данное число.

$$100 \cdot \frac{5}{4} = \frac{100 \cdot 5}{4} = 125,\ 125 > 100, \text{ так как } \frac{5}{4} > 1$$

$$125 > 100 \text{ в } 1\frac{1}{4} \text{ раза}$$



1. Ширина прямоугольника 56 см. Длина составляет $\frac{7}{8}$ ширины. Найдите площадь прямоугольника.

Дано:

Длина	a	$\frac{7}{8}$ от b
Ширина	b	56 см

Найти площадь прямоугольника.

Решение.

Общая формула решения: $S = a \cdot b$

1) $a = 56 \cdot \frac{7}{8} = \frac{56 \cdot 7}{8} = 49$ (см)	Найти часть от числа

2) Подставьте в общую формулу решения значения a и b:

$S = 49 \cdot 56 = 2744$ (см^2)

$56 \cdot 49 = 56 \cdot (50 - 1) =$
$= 56 \cdot 50 - 56 =$
$= 2800 - 56 = 2744$

Ответ: площадь прямоугольника равна 2744 см^2.

2. Расстояние от деревни до города 28 км. Житель деревни проехал $\frac{2}{7}$ пути на лошади, а остальной путь на машине. Сколько километров он проехал на машине?

Решение.

I способ

1) Найдите $\frac{2}{7}$ от 28:

$28 \cdot \frac{2}{7} = \frac{28 \cdot 2}{7} = 8$ (км) — житель проехал на лошади

2) $28 - 8 = 20$ (км) — житель проехал на машине

II способ

1) $1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$ пути житель проехал на машине

2) Найдите $\frac{5}{7}$ от 28:

$28 \cdot \frac{5}{7} = \frac{28 \cdot 5}{7} = 20$ (км) — житель проехал на машине

Ответ: житель проехал на машине 20 км.

Проверь себя!

Найдите: а) $\frac{2}{15}$ от 30; б) $\frac{3}{4}$ от 40; в) $\frac{2}{5}$ от 80.

Ответ: а) 4; б) 30; в) 32.

Алгоритм 58 Умножение смешанных дробей

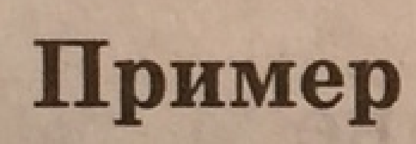
① Переведите смешанные дроби в неправильные дроби по схеме:

$$A\frac{m}{n} = \frac{An+m}{n}$$

② Умножьте полученные дроби по правилу умножения дроби на дробь: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

③ Сократите полученную дробь и переведите ее в смешанную дробь.

Например: $2\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{2} = \frac{7}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{7 \cdot \cancel{3}^{1}}{\cancel{3}_{1} \cdot 2} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$



Пример

Найдите значение выражения $2\frac{1}{2} \cdot a$, если $a = 1\frac{1}{7}$.

Решение.

$$2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{7} = \frac{5}{2} \cdot \frac{8}{7} = \frac{5 \cdot \cancel{8}^{4}}{\cancel{2}_{1} \cdot 7} = \frac{20}{7} = 2\frac{6}{7}$$

$$A\frac{m}{n} = \frac{An+m}{n}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Ответ: $2\frac{6}{7}$.

Проверь себя!

Умножьте смешанные дроби: а) $8\frac{1}{5} \cdot 1\frac{12}{13}$; б) $10\frac{1}{6} \cdot 1\frac{5}{7}$; в) $3\frac{1}{3} \cdot 3\frac{3}{5}$.

Ответ: а) $\frac{205}{13} = 15\frac{10}{13}$; б) $17\frac{3}{7}$; в) 12.

Алгоритм 59 Умножение смешанной дроби на натуральное число

① Переведите смешанную дробь и натуральное число в неправильные дроби.

② Умножьте полученные неправильные дроби по правилу умножения дробей.

Например:

$$2\frac{1}{3}\cdot 6=\frac{7}{3}\cdot\frac{6}{1}=\frac{7\cdot \not{6}^{2}}{\not{3}_{1}\cdot 1}=\frac{14}{1}=14 \qquad \Big| \quad \frac{a}{1}=a$$

Полезный совет

При умножении смешанной дроби на натуральное число можно умножить на натуральное число сначала целую, а затем дробную часть и полученные результаты сложить.

Например:

$$3\frac{2}{3}\cdot 5=\left(3+\frac{2}{3}\right)\cdot 5=3\cdot 5+\frac{2}{3}\cdot 5=15+\frac{10}{3}=15+3\frac{1}{3}=18\frac{1}{3}$$

Примеры

1. Вычислите: $3\cdot 5\frac{2}{3}$.

Решение.

$$3\cdot 5\frac{2}{3}=3\cdot\left(5+\frac{2}{3}\right)=3\cdot 5+3\cdot\frac{2}{3}=$$

$$=15+2=17$$

$$a(b+c)=ab+ac$$

$$3\cdot\frac{2}{3}=\frac{\not{3}^{1}\cdot 2}{\not{3}_{1}}=\frac{2}{1}=2$$

Ответ: 17.

2. Вычислите: $17\cdot\left(4\frac{2}{17}+2\frac{1}{11}\right)-17\cdot 2\frac{1}{11}$.

Решение.

$$17\cdot\left(4\frac{2}{17}+2\frac{1}{11}\right)-17\cdot 2\frac{1}{11}=$$

$$=17\cdot 4\frac{2}{17}+\underbrace{17\cdot 2\frac{1}{11}}_{a}-\underbrace{17\cdot 2\frac{1}{11}}_{a}=$$

$$=17\cdot 4\frac{2}{17}+\underbrace{\left(17\cdot 2\frac{1}{11}-17\cdot 2\frac{1}{11}\right)}_{0}=$$

$$=17\cdot 4\frac{2}{17}+0=\frac{17\cdot 70}{17}=70$$

$a(b+c)=ab+ac$

$a-a=0$

$\frac{a}{b}\cdot c=\frac{ac}{b}$

$A\frac{m}{n}=\frac{An+m}{n}$

Ответ: 70.

Проверь себя!

Решите уравнение $x:\left(2\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}\right)=3\cdot 2\frac{2}{5}$.

Ответ: $7\frac{1}{5}$.

Попробуй не реши!

Задача. Ширина прямоугольника составляет $\frac{5}{6}$ его длины, а длина равна 48 дм. Найдите площадь прямоугольника.

Ответ: $S = 1920$ кв. дм.

Попробуй-ка реши!

Задача. Найдите произведение трех чисел, если первое равно $\frac{6}{7}$, второе составляет $\frac{7}{18}$ от первого, а третье — $\frac{1}{5}$ от суммы первого и второго.

Ответ: $\frac{10}{147}$.

Деление дробей

Формулы деления дробей

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \qquad \frac{a}{b} : \frac{a}{b} = 1 \qquad \frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$$

$$\frac{a}{b} : 1 = \frac{a}{b} \qquad 1 : \frac{a}{b} = \frac{b}{a} \qquad c : \frac{a}{b} = \frac{c \cdot b}{a}$$

$$0 : \frac{a}{b} = 0 \qquad 1 : a = \frac{1}{a}$$

Нельзя делить на нуль!

Замечание. Числа a и $\frac{1}{a}$, а также $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ называются *взаимно обратными*, их произведение равно единице:

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1, \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

Например:

$$2 \cdot \frac{1}{2} = 1, \ \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1; \ \ a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

Алгоритм 60 Деление дробей

Выполните деление $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$.

① Первую дробь (делимое) умножьте на число, обратное второй дроби (делителю), т. е. на «перевернутую» вторую дробь (не перемножая числители и знаменатели).

② Сократите полученную дробь и перемножьте полученные множители в числителе дроби и в ее знаменателе. Запишите полученную дробь.

③ Если в ответе дробь неправильная, то запишите ее смешанной дробью.

Например, деление дробей записывается так:

$$\frac{18}{35}:\frac{9}{25}=\frac{18\cdot 25}{35\cdot 9}=\frac{\cancel{9}^{1}\cdot 2\cdot \cancel{5}^{1}\cdot 5}{\cancel{5}_{1}\cdot 7\cdot \cancel{9}_{1}}=\frac{2\cdot 5}{7}=\frac{10}{7}=1\frac{3}{7}$$

Пример

Найдите частное:

а) $\frac{1}{4}:\frac{1}{3}$ б) $\frac{7}{12}:\frac{3}{12}$ в) $\frac{17}{100}:\frac{17}{100}$ г) $0:\frac{5}{7}$

Решение.

а) $\frac{1}{4}:\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 3}{4\cdot 1}=\frac{3}{4}$

$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

б) $\frac{7}{12}:\frac{3}{12}=\frac{7\cdot 12}{12\cdot 3}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$

в) $\frac{17}{100}:\frac{17}{100}=1$

$\frac{a}{b}:\frac{a}{b}=1$

г) $0 : \frac{5}{7} = 0$ | $0 : \frac{a}{b} = 0$

Ответ: а) $\frac{3}{4}$; б) $2\frac{1}{3}$; в) 1; г) 0.

Проверь себя!

Найдите частное: а) $\frac{1}{12} : \frac{5}{36}$; б) $\frac{68}{45} : \frac{17}{15}$; в) $\frac{237}{100} : \frac{33}{10}$.

Ответ: а) $\frac{3}{5}$; б) $1\frac{1}{3}$; в) $\frac{79}{110}$.

Алгоритм 61 Деление смешанной дроби на дробь или на смешанную дробь

① Переведите каждую смешанную дробь в неправильную по схеме:

$$A\frac{m}{n} = \frac{An + m}{n}$$

② Делите дробь на дробь по правилу деления дробей:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Например, при делении $2\frac{1}{3} : \frac{5}{3}$ получим

$$2\frac{1}{3} : \frac{5}{3} = \frac{7}{3} : \frac{5}{3} = \frac{7 \cdot \not{3}^{1}}{\not{3}_{1} \cdot 5} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Пример

Выполните деление: а) $1\frac{5}{6} : \frac{22}{35}$; б) $3\frac{2}{3} : 2\frac{3}{4}$.

Решение.

а) $1\frac{5}{6}:\frac{22}{35}=\frac{11}{6}:\frac{22}{35}=\frac{11\cdot 35}{6\cdot 22}=$

$=\frac{11\cdot 35}{6\cdot 11\cdot 2}=\frac{35}{12}=2\frac{11}{12}$

б) $3\frac{2}{3}:2\frac{3}{4}=\frac{11}{3}:\frac{11}{4}=\frac{11\cdot 4}{3\cdot 11}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$

$A\frac{m}{n}=\frac{An+m}{n}$ (+, ·)

$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

Ответ: а) $2\frac{11}{12}$; б) $1\frac{1}{3}$.

Замечание. При делении смешанной дроби на натуральное число можно разделить целую часть смешанной дроби на это число (если деление нацело), дробную часть разделить на это же число и записать полученный результат.

Например, при делении $12\frac{3}{4}:4$ получим

$$12\frac{3}{4}:4=\left(12+\frac{3}{4}\right):4=12:4+\frac{3}{4}:4=3+\frac{3}{16}=3\frac{3}{16}$$

Проверь себя!

Выполните деление: а) $2\frac{3}{7}:\frac{17}{21}$; б) $\frac{5}{12}:1\frac{5}{7}$; в) $3\frac{1}{3}:1\frac{3}{7}$.

Ответ: а) 3; б) $\frac{35}{144}$; в) $2\frac{1}{3}$.

Алгоритм 62 Деление натурального числа на дробь

Выполните деление: $a:\frac{c}{d}$.

① Запишите натуральное число a в виде дроби со знаменателем 1; $a=\frac{a}{1}$.

② Разделите дроби по правилу деления дробей: $\frac{a}{1}:\frac{c}{d}$

(деление можно выполнять сразу по формуле $a:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{c}$)

Например, при делении $25:\frac{5}{7}$ пишем:

$$25:\frac{5}{7}=\frac{25}{1}:\frac{5}{7}=\frac{25\cdot 7}{5}=\frac{5\cdot \cancel{5}^{1}\cdot 7}{1\cdot \cancel{5}_{1}}=35 \qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

При делении $15:\frac{3}{5}$ пишем:

$$15:\frac{3}{5}=\frac{15\cdot 5}{3}=\frac{\cancel{3}^{1}\cdot 5\cdot 5}{\cancel{3}_{1}}=25 \qquad a:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{c}$$

Пример

Выполните деление: а) $25:\frac{5}{11}$; б) $1:\frac{7}{4}$; в) $3:\frac{7}{9}$.

Решение.

а) $25:\frac{5}{11}=\frac{25}{1}:\frac{5}{11}=\frac{5\cdot \cancel{5}^{1}\cdot 11}{1\cdot \cancel{5}_{1}}=55$ $\qquad a:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{c}$

б) $1:\frac{7}{4}=\frac{4}{7}$ $\qquad 1:\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$

в) $3:\frac{7}{9}=\frac{3\cdot 9}{7}=\frac{27}{7}=3\frac{6}{7}$ $\qquad a:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{c}$

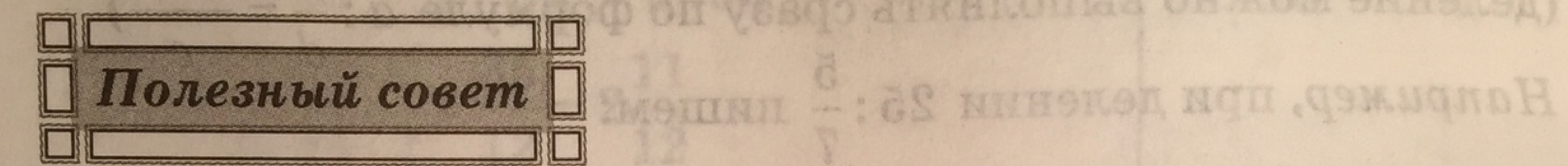
Ответ: а) 55; б) $\frac{4}{7}$; в) $3\frac{6}{7}$.

Проверь себя!

Выполните деление:

а) $3\frac{5}{12}:1$ б) $0:4\frac{1}{2}$ в) $3\frac{3}{10}:2\frac{7}{100}$ г) $45\frac{15}{17}:3$

Ответ: а) $3\frac{5}{12}$; б) 0; в) $\frac{110}{69}=1\frac{41}{69}$; г) $15\frac{5}{17}$.



При делении дроби на число можно числитель дроби разделить на это число (если это возможно), не изменяя знаменателя.

Например:

$\frac{15}{17}:3=\frac{15:3}{17}=\frac{5}{17}$; $\frac{25}{32}:5=\frac{25:5}{32}=\frac{5}{32}$ | $\frac{a}{b}:c=\frac{a:c}{b}$

Алгоритм 63 Нахождение числа по заданной его дроби

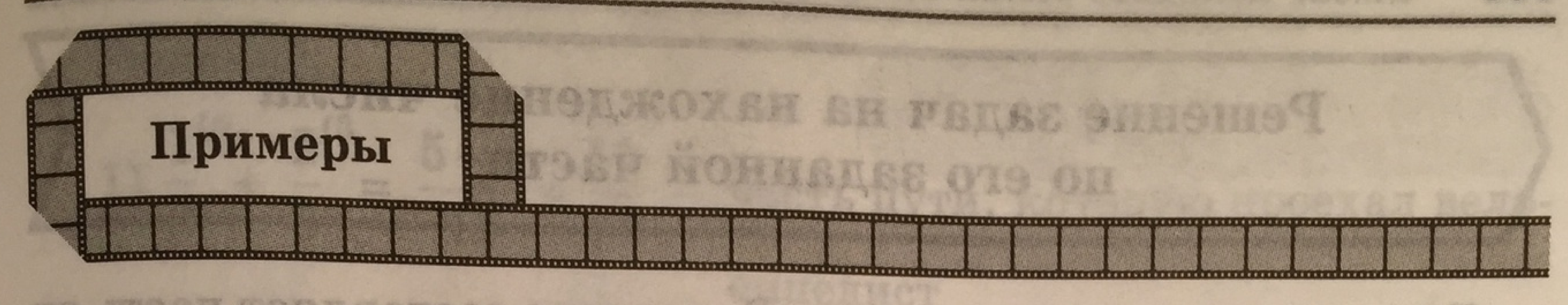
Число B составляет дробь $\frac{m}{n}$ числа A.

① Разделите данное число B на числитель m заданной дроби $\frac{m}{n}$, получите $\frac{1}{n}$ часть от искомого числа: $\frac{B}{m}$.

② Умножьте полученный результат $\frac{B}{m}$ на знаменатель дроби n, получите искомое число: $A=\frac{B\cdot n}{m}$ — формула решения.

Полезный совет

Число по его дроби можно находить в одно действие делением данного числа на дробь (или умножением на дробь, обратную данной).



1. Найдите число, $\frac{3}{5}$ которого равняется 75.

Решение.

I способ

1) $75 : 3 = 25$ — это $\frac{1}{5}$ часть искомого числа	$B = 75$
2) $25 \cdot 5 = 125$ — искомое число	$\frac{m}{n} = \frac{3}{5}$

II способ

$$75 : \frac{3}{5} = \frac{\cancel{75}^{25} \cdot 5}{\cancel{3}_1} = 125$$

Ответ: 125.

2. Ученик прочитал 28 страниц, что составляет $\frac{4}{5}$ числа всех страниц в книге. Сколько страниц в книге?

Решение.

28 страниц составляют $\frac{4}{5}$ книги:

$$28 : \frac{4}{5} = \frac{28 \cdot 5}{4} = 35 \text{ (страниц)} \qquad A = B : \frac{m}{n}$$

Ответ: в книге 35 страниц.

Внимание! Дробь от числа находите умножением числа на эту дробь. Число по его дроби находите делением данного числа на дробь.

Решение задач на нахождение числа по его заданной части

Если в задаче известно число B, которое составляет часть от всего числа A, и известна дробь $\frac{m}{n}$, которая приходится на число B, то число A находится делением числа B на эту дробь.

Если дробь $\frac{m}{n}$ — правильная, то $A > B$; если дробь $\frac{m}{n}$ — неправильная, то $A < B$.

Задача 1. Найдите разность двух чисел, если вычитаемое равно 721, что составляет $\frac{7}{8}$ уменьшаемого.

Дано:

уменьшаемое	$a > b$
вычитаемое	$b = 721$ — это $\frac{7}{8}$ от a

Найти разность чисел a и b.

Решение.

Формула решения: $c = a - b$

1) $a = b : \frac{7}{8} = 721 : \frac{7}{8} = \frac{721 \cdot 8}{7} = \frac{103 \cdot 7 \cdot 8}{7} = 824$ (первое число) — 721 составляет $\frac{7}{8}$ от a, число по его части

2) $c = 824 - 721 = 103$ — $c = a - b$

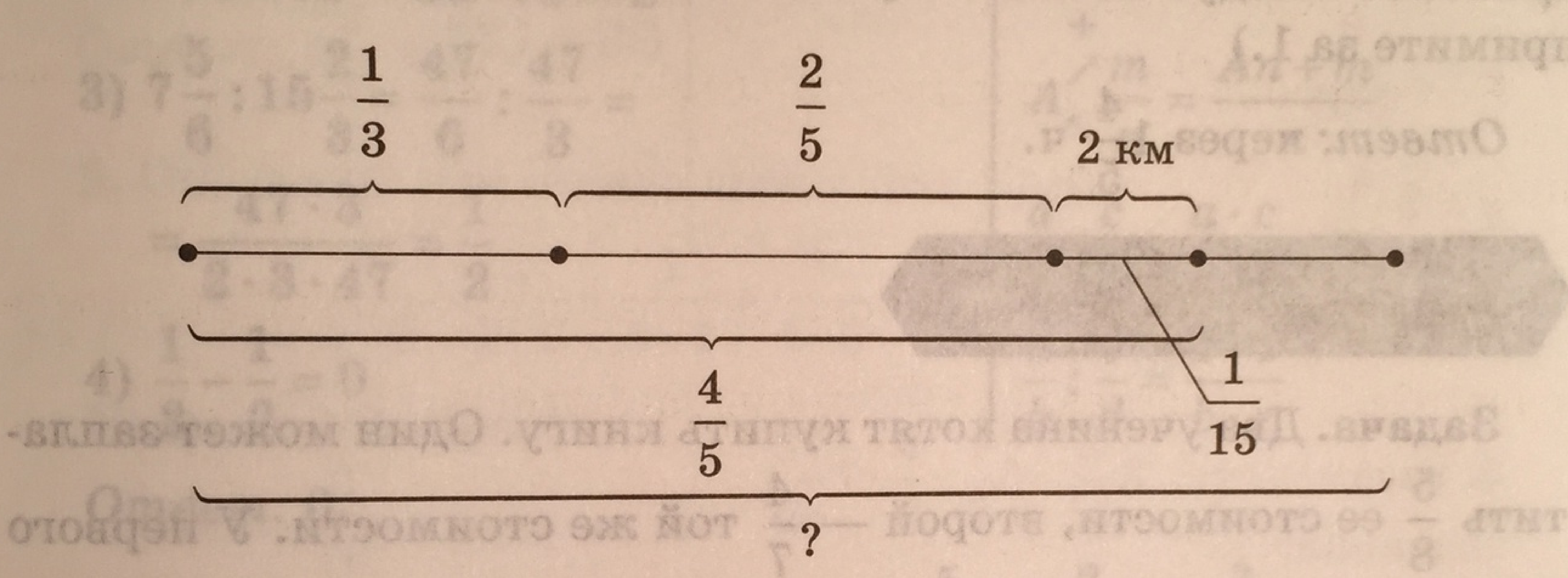
Ответ: разность двух чисел равна 103.

Задача. 2. Велосипедист проехал $\frac{1}{3}$ пути и еще $\frac{2}{5}$ всего пути, что составило расстояние, на 2 км меньшее, чем $\frac{4}{5}$ всего пути. Каков весь путь?

Решение.

1) $\frac{1^{(5}}{3} + \frac{2^{(3}}{5} = \frac{5+6}{15} = \frac{11}{15}$ — часть пути, которую проехал велосипедист

2) $\frac{4^{(3}}{5} - \frac{11}{15} = \frac{12-11}{15} = \frac{1}{15}$ — часть пути, которая соответствует 2 км (см. рисунок)



3) 2 км составляют $\frac{1}{15}$ часть пути, поэтому весь путь равен

$2 : \frac{1}{15} = 2 \cdot 15 = 30$ (км)

Ответ: 30 км — весь путь.

Проверь себя!

Задача. Собрано $\frac{9}{50}$ ц ромашки, что составляет $\frac{3}{4}$ от количества собранного подорожника, а собранные цветы липы составляют $\frac{5}{6}$ от собранного количества ромашки. Сколько всего лекарственных трав собрано? (Напомним, что 1 ц = 100 кг.)

Ответ: $\frac{57}{100}$ ц = 57 кг.

Попробуй-ка реши!

Задача. Расстояние между двумя городами автобус проходит за $4\frac{1}{2}$ ч, а легковой автомобиль — за $\frac{2}{3}$ этого времени. Через сколько времени автобус и автомобиль встретятся, если одновременно выедут из этих городов навстречу друг другу? (Путь примите за 1.)

Ответ: через $1\frac{4}{5}$ ч.

Попробуй не реши!

Задача. Два ученика хотят купить книгу. Один может заплатить $\frac{5}{8}$ ее стоимости, второй — $\frac{4}{7}$ той же стоимости. У первого ученика на 18 р. больше, чем у второго. Сколько стоит книга?

Ответ: книга стоит 336 р.

Алгоритм 64 Решение примеров на все действия с обыкновенными дробями

① Расставьте в примере порядок действий.

② Выполните действия по порядку их номеров, применяя нужные алгоритмы.

Примеры

1. $\left(5\frac{8}{9} \overset{(1)}{-} 3\frac{11}{12}\right) \overset{(2)}{\cdot} \frac{18}{71} \overset{(4)}{-} 7\frac{5}{6} \overset{(3)}{:} 15\frac{2}{3} = 0$

Решение.

1) $5\frac{8}{9}^{(4} - 3\frac{11}{12}^{(3} = 5\frac{32}{36} - 3\frac{33}{36} =$

$= 4\frac{68}{36} - 3\frac{33}{36} = 1\frac{68-33}{36} = 1\frac{35}{36}$

2) $1\frac{35}{36} \cdot \frac{18}{71} = \frac{71 \cdot 18}{36 \cdot 71} = \frac{1}{2}$

3) $7\frac{5}{6} : 15\frac{2}{3} = \frac{47}{6} : \frac{47}{3} =$

$= \frac{47 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 47} = \frac{1}{2}$

4) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

$9 = 3 \cdot 3$ | 4

$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ | 3

$ОЗ = 9 \cdot 4 = 36$

$5\frac{32}{36} = 4\frac{36}{36} + \frac{32}{36} = 4\frac{68}{36}$

$A\frac{m}{n} = \frac{An+m}{n}$

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Ответ: 0.

2. Найдите значение выражения $\frac{5}{8} \cdot b - \frac{2}{5} \cdot b + \frac{3}{20} \cdot b$ при:

а) $b = 0$ б) $b = 1$ в) $b = 2\frac{2}{3}$

Решение.

$\frac{5}{8} \cdot b - \frac{2}{5} \cdot b + \frac{3}{20} \cdot b =$

$= b \cdot \left(\frac{5}{8} - \frac{2}{5} + \frac{3}{20}\right) = b \cdot \frac{3}{8}$

а) $0 \cdot \frac{3}{8} = 0$

б) $1 \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$

в) $2\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{8} = 1$

$ab + cb = b(a + c)$

$\frac{5}{8}^{(5} - \frac{2}{5}^{(8} + \frac{3}{20}^{(2} =$

$= \frac{25 - 16 + 6}{40} = \frac{\overset{5}{15}}{40} = \frac{3}{8}$

$a \cdot 0 = 0$

$a \cdot 1 = a$

$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$

Ответ: а) 0; б) $\frac{3}{8}$; в) 1.

3. Решите уравнение: $y+7\frac{5}{24}=9\frac{7}{30}$.

Решение.

$y=9\frac{7}{30}-7\frac{5}{24}$

$y=9\frac{28}{120}-7\frac{25}{120}$

$y=2\frac{3}{120}$

$y=2\frac{1}{40}$

$y+a=b,\ y=b-a$

$30=3\cdot2\cdot5$ | 4

$24=2\cdot2\cdot2\cdot3$ | 5

ОЗ = 120

Ответ: $y=2\frac{1}{40}$.

4. Вычислите: $2\frac{2}{11}\cdot6\frac{1}{9}\cdot\frac{9}{5}\cdot1\frac{13}{40}$.

Решение.

$$2\frac{2}{11}\cdot6\frac{1}{9}\cdot\frac{9}{5}\cdot1\frac{13}{40}=\frac{24}{11}\cdot\frac{55}{9}\cdot\frac{9}{5}\cdot\frac{53}{40}=$$

$$=\frac{\cancel{6}^{3}\cdot\cancel{4}^{1}\cdot\cancel{11}^{1}\cdot\cancel{5}^{1}\cdot\cancel{9}^{1}\cdot53}{\cancel{11}_{1}\cdot\cancel{9}_{1}\cdot\cancel{5}_{1}\cdot\cancel{4}_{1}\cdot\cancel{10}_{5}}=$$

$$=\frac{3\cdot53}{5}=\frac{159}{5}=31\frac{4}{5}$$

$A\frac{m}{n}=\frac{An+m}{n}$

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$

Ответ: $31\frac{4}{5}$.

Проверь себя!

Вычислите:

$$1\frac{3}{5}-1\frac{1}{7}\cdot\left(4\frac{5}{24}-3\frac{13}{32}\right)\cdot1\frac{1}{11}+\frac{4575}{15}$$

Ответ: $305\frac{3}{5}$.

Попробуй-ка реши!

1. Во второй час пешеход прошел путь в $1\frac{1}{3}$ раза или на $1\frac{1}{2}$ км меньше, чем в первый час. Сколько километров прошел пешеход во второй час?

Ответ: $4\frac{1}{2}$ км.

2. Опишите, как проще вычислить сумму

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 10}.$$

Найдите эту сумму.

Ответ: $\frac{9}{10}$.

Решение задач на совместную работу

Условные обозначения в задачах на работу:

A — работа
p — производительность (работа за единицу времени)
t — время

Общие формулы решения:

$$A = p \cdot t \qquad p = A : t \qquad t = A : p$$

Работу A принимают за единицу, т. е. $A = 1$; при совместной работе $p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots$, где $p_1, p_2, p_3, \ldots$ — производительность труда участников работы, p — производительность совместного труда.

Алгоритм 65 Решение задач на совместную работу

① Примите работу A за единицу, т. е. $A = 1$ (если не указано количество работы).

② Если указано время t, за которое выполняется работа, то найдите скорость выполнения работы (производительность труда):

$p = A : t = 1 : t$ — часть работы за единицу времени (за 1 день, 1 месяц, 1 ч, 1 мин и др.)

③ Если дана производительность труда p и вся работа A (или 1), то найдите время t, за которое выполнялась работа:

$$t = A : p = \frac{1}{p}$$

④ Если дано время t и производительность труда p, то $A = p \cdot t$.

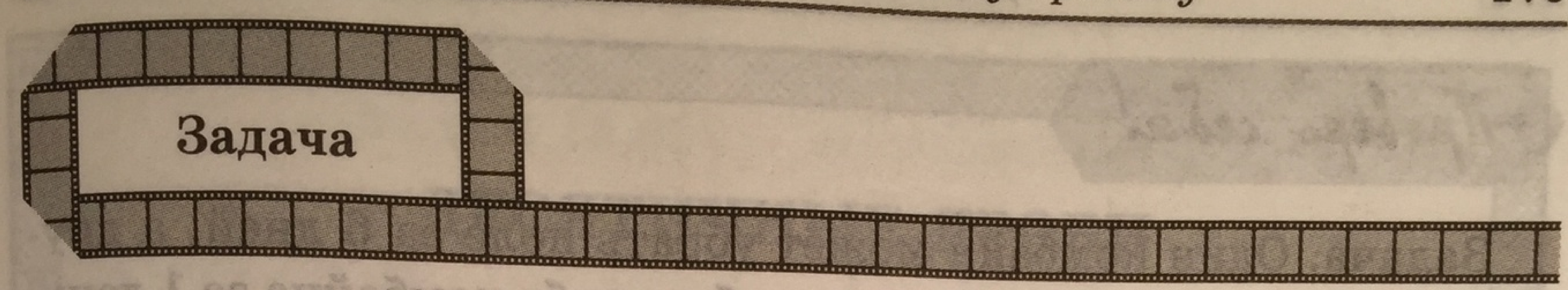
⑤ Если дано время совместной работы t и время t_1, за которое первый выполнит всю работу, то, чтобы найти время t_2, за которое второй выполнит всю работу, найдите:

а) общую производительность (скорость): $p = \frac{1}{t}$

б) $p_1 = \frac{1}{t_1}$ — производительность труда первого

в) $p_2 = \frac{1}{t_2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t_1}$ — производительность труда второго

г) $t_2 = 1 : p_2 = 1 : \frac{1}{t_2}$ — время работы второго, где $A = 1$ — вся работа, p — общая производительность труда, p_1 и p_2 — производительность труда каждого



Два трактора вспахали все поле за 4 дня. Первый трактор, работая один, может вспахать поле за 10 дней. Какую часть поля мог вспахать за 1 день второй трактор, работая один?

Дано:

	A	t	p
I	1	$t_1 = 10$ дн.	$p_1 = \frac{1}{10}$
II	1	t_2	p_2
I + II	1	4 дн.	$p = \frac{1}{4}$

Найти, какую часть поля мог вспахать второй трактор за 1 день.

Решение.

$A = 1$ (все поле), p — совместная производительность

Общая формула решения: $p_2 = p - p_1$

1) $p = 1 : 4 = \frac{1}{4}$ — часть поля, которую вспахали два трактора, работая совместно

2) $p_1 = 1 : 10 = \frac{1}{10}$ — часть поля, которую вспахал I трактор за 1 день | $p_1 = \frac{1}{t_1}$

3) $p_2 = \frac{1}{4}^{(5} - \frac{1}{10}^{(2} = \frac{3}{20}$ — часть поля, которую вспахал II трактор за 1 день | $p_2 = p - p_1$

Ответ: II трактор за 1 день мог вспахать $\frac{3}{20}$ части поля.

Проверь себя!

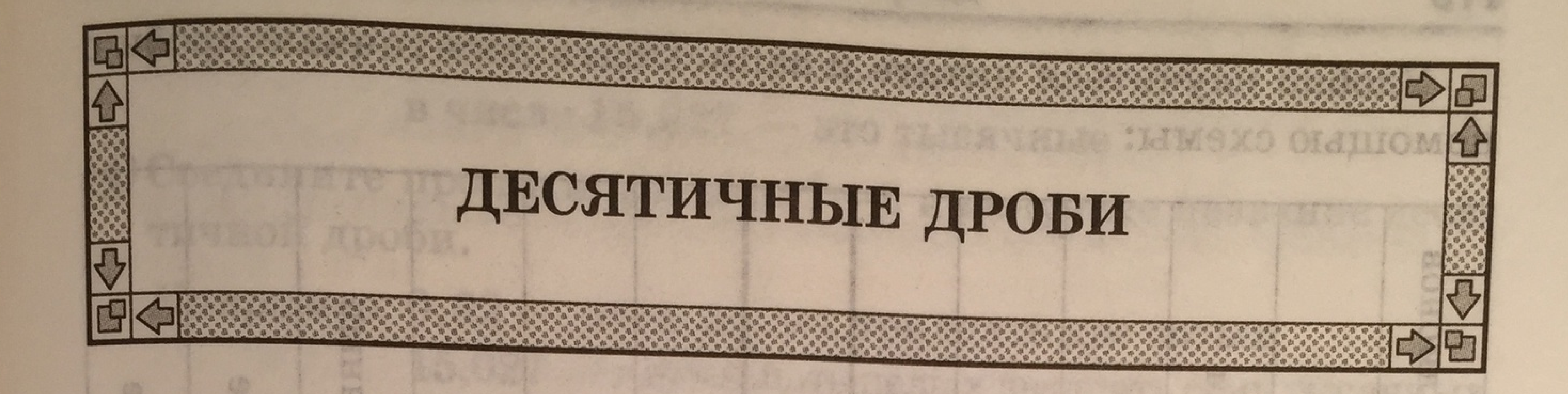
Задача. Один комбайн может убрать поле за 6 дней, а другой — за 4 дня. Какую часть поля уберут оба комбайна за 1 день, работая вместе?

Ответ: $\frac{5}{12}$.

Попробуй-ка реши!

Задача. В бассейн проведены три трубы. Через первую трубу бассейн можно наполнить водой за 3 ч, а через вторую — за 5 ч. Через третью трубу вода из наполненного бассейна может вылиться за 12 ч. Какая часть бассейна наполнится за 1 ч при одновременном действии трех труб?

Ответ: $\frac{9}{20}$.



ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

Число вида $\frac{a}{b}$ называют *обыкновенной дробью.*

Например: $\frac{3}{14}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{2}{10}$, ... — обыкновенные дроби

Доли $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ..., имеющие знаменателем единицу с одним или несколькими нулями, называют *десятичными долями.*

Дробь, знаменатель которой единица с нулями, можно записать без черты; для этого после разряда целых единиц ставят запятую (если целых единиц нет, то пишут 0), а после запятой пишут числитель дроби.

Например: $\frac{3}{10} = 0{,}3$; $\frac{15}{10} = 1{,}5$; $\frac{1}{100} = 0{,}01$

Замечание. Запятая в записи десятичной дроби отделяет:

1) целую часть от дробной;

2) справа столько знаков, сколько нулей в знаменателе обыкновенной дроби.

Цифры, стоящие в числе справа от запятой, называются *десятичными знаками.*

Например, в дроби 2,035 десятичными знаками будут цифры 0, 3, 5

Дробь, знаменатель которой единица с одним или несколькими нулями, записанная с помощью десятичных знаков, называется *десятичной дробью.*

Например: 0,18; 1,005 — десятичные дроби

Удобно научиться читать и записывать десятичные дроби с помощью схемы:

Единицы миллионов	Сотни тысяч	Десятки тысяч	Тысячи	Сотни	Десятки	Единицы	Десятые	Сотые	Тысячные	Десятитысячные	Стотысячные	Миллионные

Названия разрядов слева и справа от разряда единиц похожи: десятки — слева, десятые доли — справа; сотни — слева, сотые доли — справа и т. д.

При записи десятичных дробей нужно учесть, что в случае если разряд слева или справа от запятой не содержит единиц, то на его месте пишут 0.

Например: 0,503; 80,012; 101,00025

Алгоритм 66 Чтение десятичных дробей

① Назовите целую часть десятичной дроби — это 0 или натуральное число, записанное перед запятой.

Например, в числе 0,32 — нуль целых
в числе 15,027 — пятнадцать целых

② Назовите число, стоящее в дробной части после запятой.

Например, в числе 0,32 — это тридцать два
в числе 15,027 — это двадцать семь

③ Определите название низшего разряда дробной части числа.

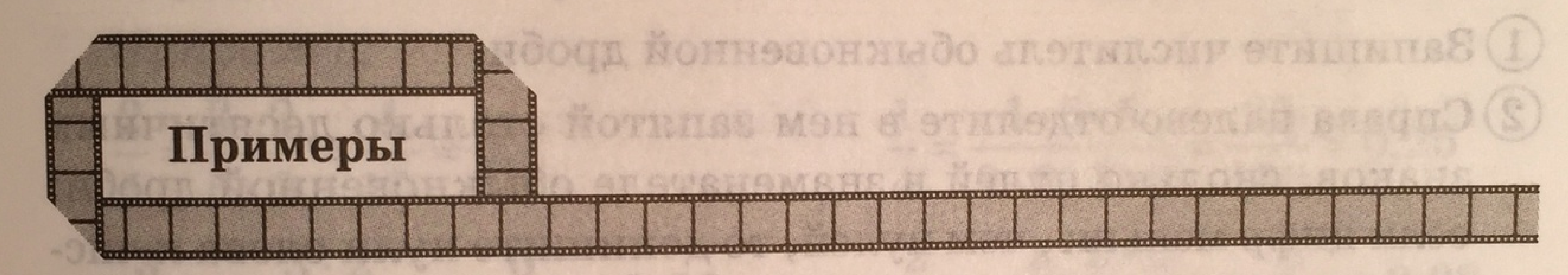
Например, в числе 0,32 — это сотые
в числе 15,027 — это тысячные

④ Соедините прочитанное в п. 1—3 и получите название десятичной дроби.

Например: 0,32 — нуль целых тридцать две сотых
15,027 — пятнадцать целых двадцать семь тысячных

Замечание. Дробную часть числа можно читать поразрядно.

Например: 17,0021 —
семнадцать целых две тысячные одна десятитысячная



1. Назовите низший разряд в десятичных дробях:

0,07 0,0002 10,00305

Решение.

Посмотрите по схеме, на каком месте после запятой стоит последняя цифра в данных числах. В числе 0,07 последний разряд справа — разряд сотых. В числе 0,0002 — разряд десятитысячных (на четвертом месте в схеме стоят десятитысячные). В числе 10,00305 — разряд стотысячных (на пятом месте в схеме стоят стотысячные).

2. Прочитайте дроби:

а) 1000,025 б) 0,0001 в) 100,13

Решение.

Читайте в таком порядке: 1) целая часть; 2) число после запятой; 3) название низшего разряда.

а) Число 1000,025 читайте так:

тысяча целых двадцать пять тысячных

б) Число 0,0001 читайте так:

нуль целых одна десятитысячная

в) Число 100,13 читайте так: сто целых тринадцать сотых

Алгоритм 67 Перевод обыкновенной дроби в конечную десятичную дробь (I способ)

I случай. Знаменатель обыкновенной дроби — единица с одним или несколькими нулями

① Запишите числитель обыкновенной дроби.

② Справа налево отделите в нем запятой столько десятичных знаков, сколько нулей в знаменателе обыкновенной дроби; если цифр меньше, чем нулей, то допишите нули слева к числителю и поставьте запятую, а перед ней запишите 0 целых.

Например:

$\frac{15}{10} = 1{,}5$ (один нуль — один десятичный знак)

$\frac{8}{1000} = 0{,}008$ (три нуля — три десятичных знака)

③ Если дана смешанная дробь, то целая часть записывается перед запятой слева.

Например: $5\frac{3}{100} = 5{,}03$; $12\frac{101}{10000} = 12{,}0101$

II случай. Знаменатель обыкновенной дроби не является единицей с нулями

① Разложите знаменатель обыкновенной дроби на простые множители.

Внимание! Если полученное разложение знаменателя содержит простые множители, отличные от 2 и 5, то эту дробь **нельзя** записать в виде конечной десятичной дроби.

Например, дробь $\frac{3}{14} = \frac{3}{2 \cdot 7}$ нельзя записать конечной десятичной дробью

Замечание. Числа 10, 100, 1000, ... состоят только из множителей 2 и 5:

$$10 = 2 \cdot 5;\ 1000 = 2^3 \cdot 5^3;\ \underbrace{10...0}_{n\ \text{нулей}} = 2^n \cdot 5^n$$

② Если разложение знаменателя на простые множители содержит только 2 и 5, то умножьте числитель и знаменатель дроби на столько двоек и пятерок, чтобы знаменатель стал единицей с нулями.

Например:

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10} = 0{,}4 \qquad \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{25}{100} = 0{,}25$$

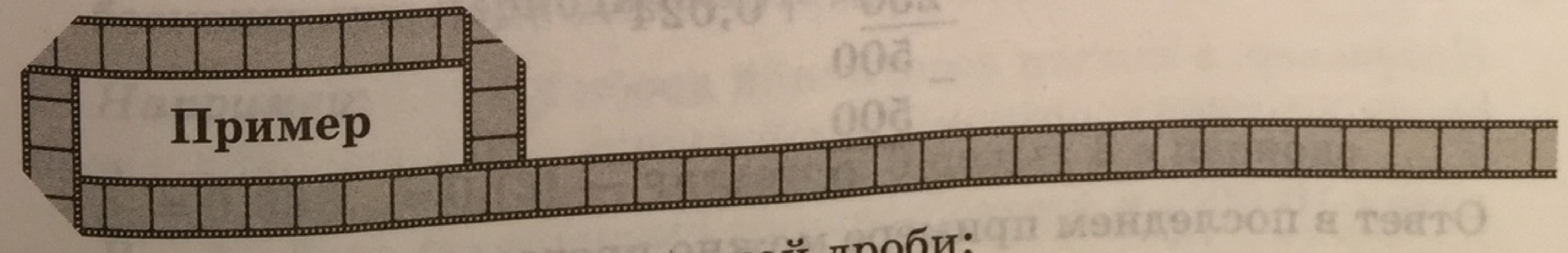
$$\frac{3}{50} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 10 \cdot 2} = \frac{6}{100} = 0{,}06 \qquad \frac{2}{25} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{8}{100} = 0{,}08$$

Полезный совет

Запомните перевод некоторых обыкновенных дробей в десятичную дробь:

$\frac{1}{2} = 0{,}5;$ $\frac{1}{4} = 0{,}25;$ $\frac{3}{4} = 0{,}75;$ $\frac{1}{5} = 0{,}2;$

$\frac{2}{5} = 0{,}4;$ $\frac{3}{5} = 0{,}6;$ $\frac{4}{5} = 0{,}8;$ $\frac{1}{25} = 0{,}04;$ $\frac{1}{50} = 0{,}02$



Запишите в виде десятичной дроби:

а) $\frac{5}{100}$ б) $\frac{4}{5}$ в) $1\frac{1}{5}$ г) $2\frac{1}{2}$ д) $30\frac{3}{100}$ е) $2\frac{2}{25}$

Решение.

а) $\frac{5}{100} = 0{,}05$

б) $\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{8}{10} = 0{,}8$

в) $1\frac{1}{5} = 1\frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 2} = 1\frac{2}{10} = 1{,}2$

г) $2\frac{1}{2} = 2\frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = 2\frac{5}{10} = 2{,}5$

д) $30\frac{3}{100} = 30{,}03$

е) $2\frac{2}{25} = 2\frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2} = 2\frac{8}{100} = 2{,}08$

Ответ: а) 0,05; б) 0,8; в) 1,2; г) 2,5; д) 30,03; е) 2,08.

Алгоритм 68 Перевод обыкновенной дроби в конечную десятичную дробь (II способ)

① Разделите числитель дроби на ее знаменатель.

② Если деление выполнено без остатка, то в ответе получите **десятичную конечную** дробь.

Например: $\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0{,}75$

$\frac{3}{125} = 0{,}024$

$$\begin{array}{r|l} 3{,}000 & 125 \\ \underline{250} & 0{,}024 \\ 500 & \\ \underline{500} & \\ 0 & \end{array}$$

Ответ в последнем примере можно проверить так:

$$\frac{3}{125} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{24}{1000} = 0{,}024$$

Проверь себя!

1. Запишите числа десятичной дробью и прочитайте их:

а) $\frac{17}{100}$ б) $1\frac{32}{1000}$ в) $10\frac{161}{10000}$

Ответ: а) 0,17; б) 1,032; в) 10,0161.

2. Выберите из чисел $\frac{3}{5}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{14}{25}$; $1\frac{5}{8}$; $\frac{10}{15}$; $\frac{25}{35}$; $5\frac{4}{125}$ те, которые можно записать конечной десятичной дробью. Запишите эти десятичные дроби.

Ответ: $\frac{3}{5} = 0,6$; $\frac{14}{25} = 0,56$; $1\frac{5}{8} = 1,625$; $5\frac{4}{125} = 5,032$.

Алгоритм 69 Перевод обыкновенной дроби в бесконечную десятичную дробь

① Если при делении числителя дроби на ее знаменатель получите повторяющийся остаток, то **десятичная дробь** будет **бесконечной.**

② Разделите числитель дроби на ее знаменатель до первой повторяющейся группы цифр.

③ Повторяющуюся группу цифр (она и является периодом дроби) запишите в круглых скобках. Получите десятичную бесконечную **периодическую дробь.**

Например:

$\frac{1}{6} = 0,333... = 0,(3)$ — читается: 0 целых 3 в периоде

$\frac{5}{6} = 0,833... = 0,8(3)$ —читается: 0 целых 8 десятых и 3 в периоде

$\frac{10}{7} = 1,\underbrace{428571}428571... = 1,(428571)$ — читается: 1 целая и 428571 в периоде

Проверь себя!

Запишите дроби $\frac{5}{3}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{8}{15}$; $\frac{2}{9}$ в виде десятичной периодической дроби.

Ответ: $\frac{5}{3} = 1,(6)$; $\frac{4}{7} = 0,(571428)$; $\frac{8}{15} = 0,5(3)$; $\frac{2}{9} = 0,(2)$.

Алгоритм 70 Перевод десятичной дроби в обыкновенную дробь

① Целая часть обыкновенной дроби равна целой части десятичной и отсутствует, если она равна нулю.

② Число, стоящее после запятой, запишите в числитель (без нулей, стоящих после запятой до первой отличной от нуля цифры).

Например: $2,0025 = 2\frac{25}{....}$

③ Знаменатель дроби запишите в виде единицы со столькими нулями, сколько цифр стоит после запятой.

Например: $2,0025 = 2\frac{25}{10000}$

④ Сократите полученную дробь, если это возможно.

Например, в записи десятичной дроби 2,0025 после запятой стоят 4 цифры, поэтому знаменатель обыкновенной дроби равен 10 000; в ответе получим смешанную дробь $2\frac{25}{10000}$, которую можно сократить на 25, т. е. $2,0025 = 2\frac{1}{400}$

Примеры

1. Запишите в виде обыкновенных дробей десятичные дроби:

а) 0,03 б) 1,7 в) 15,0206

Решение.

а) $0{,}03 = \frac{3}{100}$; б) $1{,}7 = 1\frac{7}{10}$; в) $15{,}0206 = 15\frac{206}{10000} = 15\frac{103}{5000}$

2. Выразите в сантиметрах:

а) 0,01 м б) 0,25 м в) 0,9 м г) 3,25 м

Решение.

а) $0{,}01$ м $= \frac{1}{100}$ м $= 1$ см

в) $0{,}90$ м $= \frac{90}{100}$ м $= 90$ см

б) $0{,}25$ м $= \frac{25}{100}$ м $= 25$ см

г) $3{,}25$ м $= 3\frac{25}{100}$ м $= 325$ см

3. Запишите в граммах: а) 0,001 кг; б) 0,027 кг; в) 2,25 кг.

Решение.

а) $0{,}001$ кг $= \frac{1}{1000}$ кг $= 1$ г

б) $0{,}027$ кг $= \frac{27}{1000}$ кг $= 27$ г

в) $2{,}250$ кг $= 2\frac{250}{1000}$ кг $= 2250$ г

Проверь себя!

Запишите в виде обыкновенных дробей десятичные дроби:

а) 0,007 б) 51,27 в) 100,0101 г) 1,000025

Ответ: а) $\frac{7}{1000}$; б) $51\frac{27}{100}$; в) $100\frac{101}{10000}$; г) $1\frac{1}{40000}$.

Основное свойство десятичной дроби

Если к десятичной дроби приписать справа один или несколько нулей, то получим дробь, равную данной.

Например:

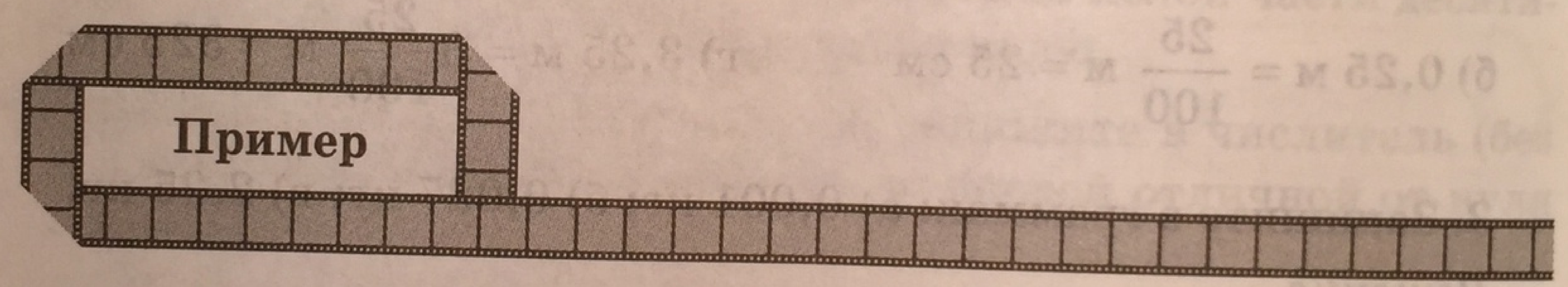
$$\frac{5}{10}=\frac{50}{100}=\frac{500}{1000} \qquad \frac{a}{b}=\frac{a\cdot m}{b\cdot m}$$

$$0{,}5 = 0{,}50 = 0{,}500 = 0{,}5000$$

Если десятичная дробь оканчивается одним или несколькими нулями, то эти нули можно отбросить; в результате получится дробь, равная данной.

Например:

$$12{,}300 = 12{,}30 = 12{,}3$$
$$0{,}00100 = 0{,}001$$



Выразите в тысячных долях дроби: а) 0,39; б) 24,6; в) 5,07.

Решение.

а) 0,39 = 0,390; б) 24,6 = 24,600; в) 5,07 = 5,070.

Алгоритм 71 Округление десятичных дробей

① Если десятичная дробь округляется до разряда в целой части, то примените правило округления натуральных чисел: за округляемым разрядом в целой части пишите нули до запятой, все разряды после запятой отбросьте.

Например: 17[5],96 ≈ 180; 28[1],89 ≈ 280

② **Если десятичная дробь округляется до разряда в дробной части, то подчеркните этот разряд и оцените цифру, стоящую за подчеркнутым разрядом:**

а) если это 0, 1, 2, 3, 4, то подчеркнутую цифру сохраните, а все цифры за ней отбросьте;

б) если после подчеркнутого разряда стоят цифры 5, 6, 7, 8, 9, то к единицам этого разряда прибавьте 1, а остальные за ним цифры отбросьте.

Например, при округлении числа $21{,}\underline{8}\boxed{0}54$ до десятых (за подчеркнутым разрядом 8 десятых стоит 0) получим $21{,}\underline{8}\boxed{0}54 \approx$ $\approx 21{,}8$; при округлении числа 105,1556 до десятых получим $105{,}\underline{1}\boxed{5}56 \approx 105{,}2$, а до сотых получим $105{,}1\underline{5}\boxed{5}6 \approx 105{,}16$

Примеры

1. Округлите до тысячных долей числа:

а) 0,0251 б) 1,40085 в) 0,5555

Решение.

а) $0{,}02\underline{5}\boxed{1} \approx 0{,}025$; б) $1{,}40\underline{0}\boxed{8}5 \approx 1{,}401$; в) $0{,}55\underline{5}\boxed{5} \approx 0{,}556$

2. Округлите до десятых долей числа:

а) 0,063 б) 1,035 в) 0,0097

Решение.

а) $0{,}\underline{0}\boxed{6}3 \approx 0{,}1$; б) $1{,}\underline{0}\boxed{3}5 \approx 1{,}0$; в) $0{,}\underline{0}\boxed{0}97 \approx 0{,}0$

3. Округлите до единиц числа: а) 3,4; б) 0,59; в) 0,09.

Решение.

а) $\underline{3}{,}\boxed{4} \approx 3$; б) $\underline{0}{,}\boxed{5}9 \approx 1$; в) $\underline{0}{,}\boxed{0}9 \approx 0$

4. Объясните, до какого разряда и верно ли округлены числа:

а) $3{,}432 \approx 3{,}4$ б) $0{,}265 \approx 0{,}27$ в) $0{,}00044 \approx 0{,}001$

Решение.

а) Число 3,432 округлили до десятых верно, так как за цифрой 4 следует цифра 3

б) Число 0,265 округлили до сотых верно, так как за цифрой 6 следует цифра 5

в) Число 0,00044 округлили до тысячных неверно, так как за 0 следует цифра 4

Проверь себя!

Округлите числа: а) 0,0273 до сотых; б) 273,015 до сотен; в) 5,0168 до тысячных.

Ответ: а) 0,03; б) 300; в) 5,017.

Алгоритм 72 Сравнение десятичных дробей

① Сравните целые части. Если они не равны, то та дробь больше, у которой целая часть больше.

Например: $2{,}39 > 1{,}95$, так как $2 > 1$

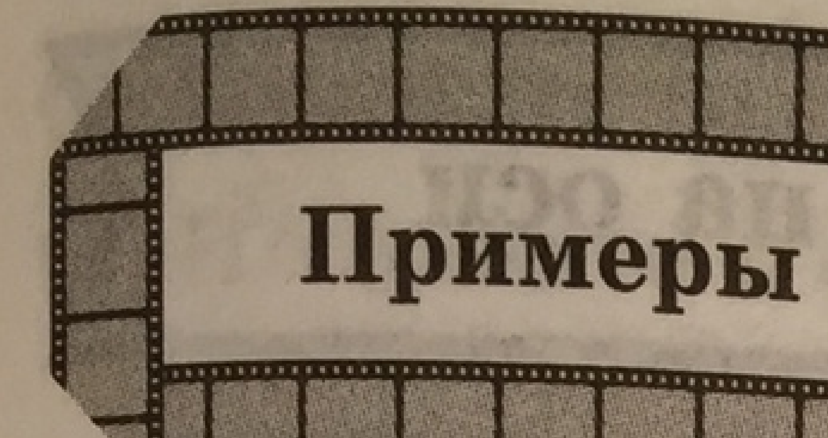
② Если целые части равны, то сравните десятые доли. Если они не равны, то та дробь больше, у которой десятых больше.

Например: $5{,}\underline{3}9 < 5{,}\underline{4}1$, так как $0{,}3 < 0{,}4$ $(3 < 4)$

③ Если и десятые доли равны, то аналогично сравните сотые доли и т. д.

Например: $0{,}2\underline{5}6 < 0{,}2\underline{6}1$, так как $0{,}05 < 0{,}06$ $(5 < 6)$

Замечание. Если в одной дроби разрядов больше, то уравняйте количество разрядов, приписав справа нули, и сравнивайте.



Примеры

1. Сравните числа:

а) 0,41 и 0,4
б) 2,506 и 2,056
в) 8,104 и 18,104
г) 50,2904 и 50,2900

Решение.

а) $0{,}4\underline{1} > 0{,}4\underline{0}$	$0{,}4 = 0{,}40$; $0{,}0\underline{1} > 0{,}0\underline{0}$
б) $2{,}\underline{5}06 > 2{,}\underline{0}56$	$0{,}\underline{5} > 0{,}\underline{0}$
в) $8{,}104 < 18{,}104$	$8 < 18$
г) $50{,}290\underline{4} > 50{,}290\underline{0}$	$50{,}29 = 50{,}2900$ $0{,}000\underline{4} > 0{,}000\underline{0}$

2. Найдите пропущенную цифру при условии, что верно неравенство:

а) 0,*4 > 0,54 б) 6,38* < 6,39

Решение.

а) 0,*4 > 0,54 — это могут быть цифры 6, 7, 8, 9

б) 6,38* < 6,39 — это может быть любая цифра, так как 0,08 < 0,09

Проверь себя!

Сравните числа:

а) 2,506 и 2,513 б) 0,0108 и 0,011 в) 100,999 и 101,001

Ответ: а) 2,506 < 2,513; б) 0,0108 < 0,011; в) 100,999 < 101,001.

Изображение десятичных дробей на оси

Десятичные дроби изображаются на числовом луче точкой, причем если дроби равны (0,3 = 0,30), то это одна и та же точка. Если дроби не равны (0,6 > 0,3), то большее число изобразится точкой, стоящей на луче правее, меньшее — левее.

Действия над десятичными дробями

Законы сложения и умножения

Для действий с десятичными дробями справедливы те же законы, что и для натуральных чисел.

$$a + b = b + a,\ a \cdot b = b \cdot a \ (\textit{переместительный закон})$$

$$a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \ (\textit{сочетательный закон})$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c,\ (a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$$
(*распределительный закон*)

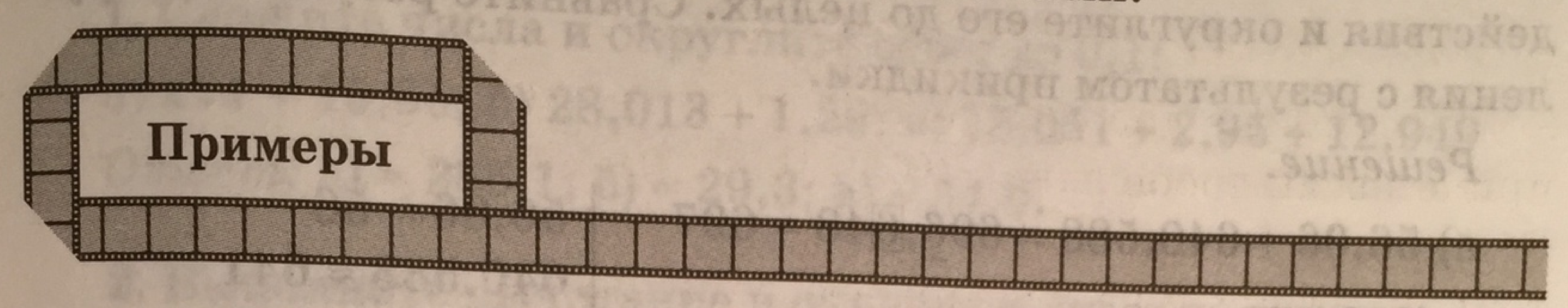
Алгоритм 73 Сложение и вычитание десятичных дробей

① Запишите десятичные дроби в столбик так, чтобы запятая была под запятой.

② Припишите нули справа к той дроби, в которой меньше десятичных знаков, чтобы их стало поровну.

③ Сложите (или вычтите) дроби как натуральные числа.

④ Поставьте в ответе запятую под запятыми.



1. Вычислите: а) 476,02 + 0,8792; б) 412 – 0,753.

Решение.

а) 476,02 + 0,8792 = 476,8992

б) 412 – 0,753 = 411,247

$$\begin{array}{r} 476{,}0200 \\ +\;\;0{,}8792 \\ \hline 476{,}8992 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\dot{1}\dot{2}{,}\dot{0}00 \\ -\;\;0{,}753 \\ \hline 411{,}247 \end{array}$$

Ответ: а) 476,8992; б) 411,247.

2. Вычислите, применяя законы сложения:

а) 0,805 + 45,45 + 54,55 б) 15,26 – 9,2 – 3,06

Решение.

а) 0,805 + 45,45 + 54,55 = 0,805 + + (45,45 + 54,55) = 0,805 + 100 = 100,805

б) 15,26 – 9,2 – 3,06 = 15,26 – (9,2 + + 3,06) = 15,26 – 12,26 = 3

$a + b + c = a + (b + c)$

$a - b - c = a - (b + c)$

Ответ: а) 100,805; б) 3.

3. Выполните действия и округлите результаты до десятых:

а) 1,064 – 0,8246 б) 76,154 + 12,79

Решение.

а) 1,064 – 0,8246 = $0{,}\underline{2}\boxed{3}94$ ≈ 0,2

б) 76,154 + 12,79 = $88{,}\underline{9}\boxed{4}4$ ≈ 88,9

$$\begin{array}{r} \dot{1}{,}\dot{0}\dot{6}40 \\ -\;\;0{,}8246 \\ \hline 0{,}2394 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 76{,}154 \\ +\;\;12{,}790 \\ \hline 88{,}944 \end{array}$$

Ответ: а) ≈ 0,2; б) ≈ 88,9.

4. Округлите дроби до единиц и найдите приближенный ответ: а) 56,06 + 640,588; б) 7950,84 – 835,0084. Найдите результат действия и округлите его до целых. Сравните результат округления с результатом прикидки.

Решение.

а) 56,06 + 640,588 = 696,648 ≈ 697

$$\begin{array}{r} 640{,}588 \\ +\ 56{,}060 \\ \hline 696{,}648 \end{array}$$

56,06 ≈ 56
640,588 ≈ 641
641 + 56 = 697 — результат прикидки

Результат округления равен результату прикидки ответа.

б) 7950,84 – 835,0084 = 7115,8316 ≈ ≈ 7116

$$\begin{array}{r} 7950{,}8400 \\ -\ 835{,}0084 \\ \hline 7115{,}8316 \end{array}$$

7950,84 ≈ 7951
835,0084 ≈ 835

$$\begin{array}{r} 7951 \\ -\ 835 \\ \hline 7116 \end{array}$$

Результат округления равен результату прикидки ответа.

Ответ: а) ≈ 697; б) ≈ 7116.

5. Решите уравнение 0,0284 + (0,0016 + x) = 15.

Решение.

$\underbrace{0{,}0284}_{a} + \underbrace{(0{,}0016 + x)}_{y} = \underbrace{15}_{b}$

Если $a + y = b$, то $y = b - a$

0,0016 + x = 15 – 0,0284
0,0016 + x = 14,9716
x = 14,9716 – 0,0016, x = 14,97

$$\begin{array}{r} 15{,}0000 \\ -\ 0{,}0284 \\ \hline 14{,}9716 \end{array}$$

Ответ: 14,97.

Проверь себя!

1. Сложите числа и округлите ответ до 0,1:

а) 271 + 15,05; б) 28,013 + 1,29; в) 18,051 + 2,95 + 12,949

Ответ: а) ≈ 286,1; б) ≈ 29,3; в) ≈ 34,0.

2. Выполните вычитание и округлите ответ до единиц:

а) 16,12 – 2,008; б) 10,05 – 1,5; в) 6,73 – 2,25 – 1,48

Ответ: а) ≈ 14; б) ≈ 9; в) 3.

Алгоритм 74 Умножение десятичных дробей на 10, 100, 1000, ...

① Сосчитайте количество нулей во втором множителе.

② Перенесите в данном числе запятую вправо на столько знаков, сколько нулей во втором множителе.

③ Если в данном числе не хватает разрядов при перенесении запятой, то припишите к полученному числу справа столько нулей, сколько не хватает разрядов.

Например:

2,3 · 100 = 230 0,0051 · 1000 = 5,1 12,4 · 100 = 1240

Примеры

1. Выполните умножение:

а) 0,007 · 100; б) 0,01 · 1000; в) 0,203 · 10 000; г) 7,55 · 10

Решение.

а) 0,007 · 100 = 0,7 | , (→) на 2 знака

б) 0,01 · 1000 = 0,010 · 1000 = 10 | , (→) на 3 знака

в) $0{,}203 \cdot 10\,000 = 2030$ | , (→) на 4 знака
г) $7{,}55 \cdot 10 = 75{,}5$ | , (→) на 1 знак

Ответ: а) 0,7; б) 10; в) 2030; г) 75,5.

2. Увеличьте число 0,42 в 10, 100, 1000 раз.

Решение.

$0{,}42 \cdot 10 = 4{,}2$; $0{,}42 \cdot 100 = 42$; $0{,}42 \cdot 1000 = 420$

3. Запишите числами:

а) 0,3 тыс. б) 4,01 млн в) 1,2 млрд

Решение.

а) 0,3 тыс. = $0{,}3 \cdot 1000 = 300$

б) 4,01 млн = $4{,}01 \cdot 1\,000\,000 = 4\,010\,000$

в) 1,2 млрд = $1{,}2 \cdot 1\,000\,000\,000 = 1\,200\,000\,000$

4. Выразите 5,224 м в дециметрах, сантиметрах, миллиметрах.

Решение.

5,224 м = ($5{,}224 \cdot 10$) дм = 52,24 дм | 1 м = 10 дм
5,224 м = ($5{,}224 \cdot 100$) см = 522,4 см | 1 м = 100 см
5,224 м = ($5{,}224 \cdot 1000$) мм = 5224 мм | 1 м = 1000 мм

Ответ: 5,224 м = 52,24 дм = 522,4 см = 5224 мм.

Проверь себя!

Умножьте числа:

а) $85{,}3 \cdot 10$ б) $0{,}02 \cdot 100$ в) $1{,}52 \cdot 1000$
г) $0{,}0019 \cdot 100$ д) $10{,}0101 \cdot 1000$

Ответ: а) 853; б) 2; в) 1520; г) 0,19; д) 10010,1.

Алгоритм 75 Умножение десятичных дробей

① Умножьте десятичные дроби как натуральные числа столбиком, не обращая внимания на запятые.

Например, при умножении чисел 3,8 и 0,056 сначала будем умножать числа 38 и 56

② Отделите в полученном произведении запятой справа налево (←) столько знаков, сколько их после запятой в обоих данных множителях вместе.

Например: $3{,}8 \cdot 0{,}056 = 0{,}2128$ (так как $38 \cdot 56 = 2128$ и в двух множителях вместе 4 десятичных знака)

③ Если цифр не хватает, то припишите слева недостающее количество нулей и поставьте слева запятую, а перед ней нуль (целых).

Например: $0{,}08 \cdot 0{,}13 = 0{,}\underline{0}104$

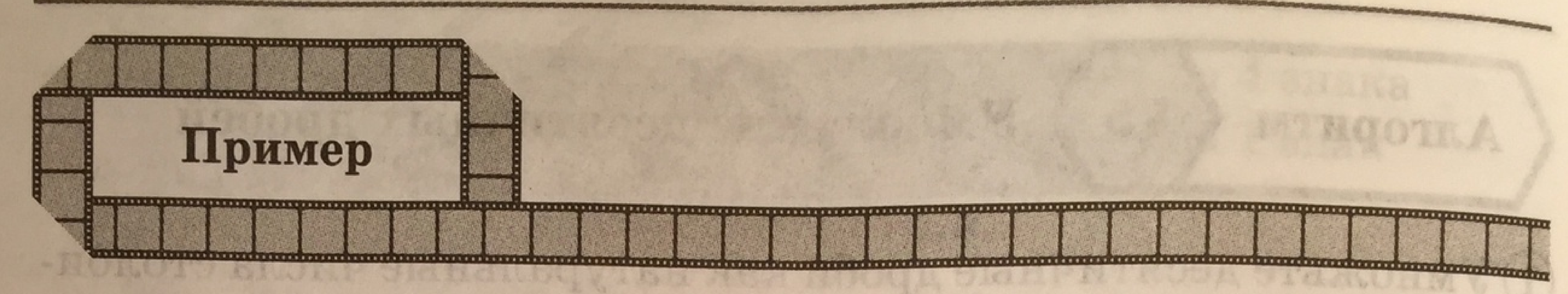
Помните! При умножении десятичных дробей столбиком запятую ставьте только в числах и в ответе, а в промежуточных вычислениях запятую не ставьте.

Полезный совет

Договоримся в дальнейшем вместо слов «запятую перенесли на 3 знака вправо» писать так: , (→) на 3 знака, аналогично вместо слова «влево» писать (←).

Замечание. При умножении числа *A* на десятичную дробь с нулем целых в ответе получится число, меньшее числа *A*, а при умножении числа *A* на десятичную дробь, целая часть которой отлична от нуля, получится число, большее *A*.

Например: $5 \cdot 0{,}2 = 1{,}0 = 1$; $5 \cdot 1{,}2 = 6{,}0 = 6$



Умножьте числа:

а) $5,3 \cdot 0,002$; б) $1,5 \cdot 1,23$; в) $2,8 \cdot 0,1$; г) $95 \cdot 0,2 \cdot 0,005$

Решение.

а) $5,3 \cdot 0,002 = 0,0106$	$53 \cdot 2 = 106$ (, (←) на 4 знака) $0,0106 < 5,3$; $0,002 < 1$
б) $1,5 \cdot 1,23 = 1,845$ $\times$ 1,23 1,5 + 615 123 1,845	$123 \cdot 15 = 1845$ (, (←) на 3 знака) $1,845 > 1,5$
в) $2,8 \cdot 0,1 = 0,28$	$28 \cdot 1 = 28$ (, (←) на 2 знака)
г) $95 \cdot 0,2 \cdot 0,005 = 95 \cdot 0,001 =$ $= 0,095$	$2 \cdot 5 = 10$ (, (←) на 4 знака) $0,0010 = 0,001$ $a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Ответ: а) 0,0106; б) 1,845; в) 0,28; г) 0,095.

Проверь себя!

Умножьте числа:

а) $21,5 \cdot 0,00064$

б) $1,015 \cdot 1,2$

в) $0,2 \cdot 12,72 \cdot 0,5$

г) $0,5 \cdot 0,25 \cdot 2$

Ответ: а) 0,01376; б) 1,218; в) 1,272; г) 0,25.

Алгоритм 76 Деление десятичной дроби на натуральное число

① 1) Если целая часть делимого равна 0 или меньше делителя, то сначала в ответе запишите 0 целых и поставьте запятую.

2) Если целая часть делимого больше делителя, то разделите целую часть нацело или с остатком, поставьте запятую в ответе (после полученного числа).

② Продолжите деление далее как деление натуральных чисел (записывая результат после запятой).

③ При делении до заданной степени точности приписывайте к делимому справа нули и делите дальше до разряда, следующего за требуемым (чтобы получить точнее приближенное значение).

Например, при делении чисел и округлении ответа до десятых делите до сотых:

1) $324{,}5 : 25 = 12{,}98 \approx 13{,}\underline{0}$ 2) $143{,}55 : 45 = 3{,}19 \approx 3{,}2$

```
_324,50 | 25          _143,55 | 45
  25    |12,98          135   |3,19
  __                    ___
 _74                    _85
  50                     45
  __                     __
 _245                   _405
  225                    405
  ___                    ___
  _200                     0
   200
   ___
     0
```

$12{,}\underline{9}\boxed{8} \approx 13{,}0$ (здесь 0 показывает точность округления)

Ответ: 1) $\approx 13{,}0$; 2) $\approx 3{,}2$.

Замечание. При делении натуральных чисел пользуйтесь соответствующим алгоритмом.

Например, при делении 3 на 4 и 25 на 8 пишите:

1) 3 : 4 = 0,75

$$\begin{array}{r|l} 3{,}00 & 4 \\ \underline{2\;8} & 0{,}75 \\ 20 & \\ \underline{20} & \\ 0 & \end{array}$$

2) 25 : 8 = 3,125

$$\begin{array}{r|l} 25{,}000 & 8 \\ \underline{24} & 3{,}125 \\ 1\;0 & \\ \underline{8} & \\ 20 & \\ \underline{16} & \\ 40 & \\ \underline{40} & \\ 0 & \end{array}$$

Ответ: 1) 0,75; 2) 3,125.

Примеры

1. Выполните действие: а) 12,42 : 180; б) 3 : 5; в) $\frac{2}{25}$.

Решение.

а) 12,42 : 180 = 0,069

$$\begin{array}{r|l} 12{,}420 & 180 \\ \underline{12\;4} & 0{,}069 \\ 12\;42 & \\ \underline{10\;80} & \\ 1\;620 & \\ \underline{1\;620} & \\ 0 & \end{array}$$

б) 3 : 5 = 0,6

в) $\frac{2}{25} = 0{,}08$ | 2,00 : 25 = 0,08

2. Решите уравнение 28,5 : x = 4.

Решение.

28,5 : x = 4

$x = 28{,}5 : 4$ $x = 7{,}125$	Если $a : x = b$, то $x = a : b$

Проверка:

$7{,}125 \cdot 4 = 28{,}5$	$7{,}125 \cdot 4 = (7 + 0{,}125) \cdot 4 = 7 \cdot 4 + 0{,}125 \cdot 4 =$ $= 28 + 0{,}500 = 28{,}5$

Ответ: 7,125.

Проверь себя!

Найдите частное: а) 275,125 : 25; б) 0,2748 : 24.

Ответ: а) 11,005; б) 0,01145.

Алгоритм 77 Деление десятичной дроби на 10, 100, 1000, ...

① Сосчитайте количество нулей в делителе (n нулей).

② Перенесите в делимом десятичной дроби запятую влево (←) на n цифр.

③ Если в числе не хватает разрядов слева от запятой, то припишите столько нулей, сколько не хватает разрядов, и поставьте запятую, а перед ней 0 (целых).

Например:

$22{,}7 : 10 = 2{,}27$; $42{,}5 : 100 = 0{,}425$; $0{,}4 : 1000 = 0{,}0004$

Замечание. Разделить число на 10, 100, 1000, ... — все равно что умножить это число на 0,1; 0,01; 0,001; ... соответственно.

Например:

$3{,}14 : 10 = 0{,}314$ и $3{,}14 \cdot 0{,}1 = 0{,}314$

Примеры

1. Найдите частное: а) 4,113 : 100; б) 14 : 10; в) 1230 : 1000.

Решение.

а) 4,113 : 100 = 0,04113	, (←) на 2 знака
б) 14 : 10 = 1,4	, (←) на 1 знак
в) 1230 : 1000 = 1,23	, (←) на 3 знака

2. Выразите в тысячах: а) 52 300; б) 3 244 860.

Решение.

а) 52 300 = 52,3 тыс.	52 300 : 1000 = 52,3
б) 3 244 860 = 3244,86 тыс.	3 244 860 : 1000 = 3244,86

3. Выразите 265 мм в сантиметрах, дециметрах, метрах.

Решение.

265 мм = 26,5 см	265 : 10 = 26,5	, (←) на 1 знак
265 мм = 2,65 дм	265 : 100 = 2,65	, (←) на 2 знака
265 мм = 0,265 м	265 : 1000 = 0,265	, (←) на 3 знака

Проверь себя!

1. Выполните деление:

а) 0,6 : 10 б) 1,21 : 100 в) 10,105 : 10

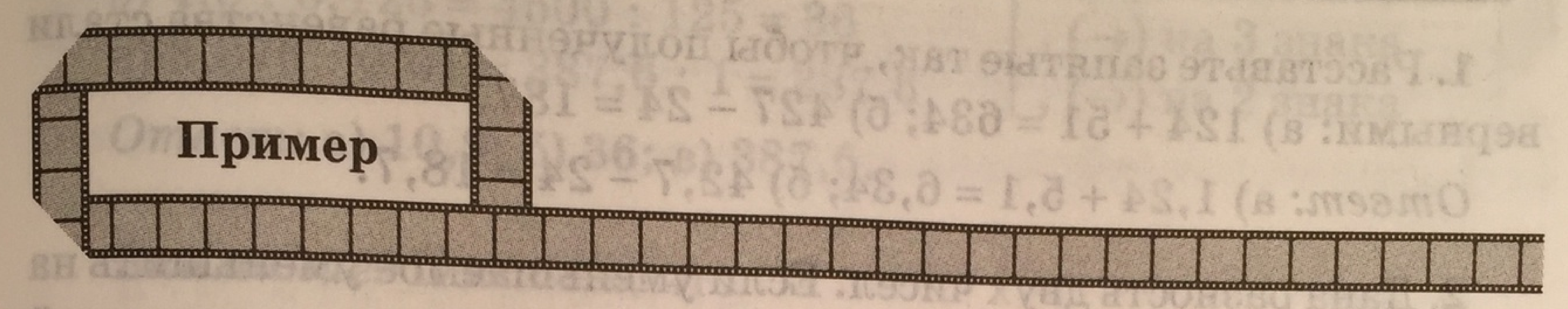
Ответ: а) 0,06; б) 0,0121; в) 1,0105.

2. Деление замените умножением на 0,01; 0,001; ...:

а) 1,8 : 100 б) 13,8 : 1000 в) 0,17 : 100

Ответ: а) 0,018; б) 0,0138; в) 0,0017.

Решение примеров, в которых встречается умножение и деление чисел на 10, 100, 1000, ...



Вычислите и результат округлите до сотых:

$$1{,}343 \overset{1}{\cdot} 100 \overset{4}{-} 239{,}3 \overset{2}{:} 1000 \overset{5}{+} 0{,}16 \overset{3}{:} 100 \approx 134{,}06$$

Решение.

1) $1{,}343 \cdot 100 = 134{,}3$ — , (→) на 2 знака

2) $239{,}3 : 1000 = 0{,}2393$ — , (←) на 3 знака

3) $0{,}16 : 100 = 0{,}0016$ — , (←) на 2 знака

...

4) $134{,}3 - 0{,}2393 = 134{,}0607$

$$\begin{array}{r} 134{,}3000 \\ -\;\;\;0{,}2393 \\ \hline 134{,}0607 \end{array}$$

5) $134{,}0607 + 0{,}0016 = 134{,}0623 \approx$
$\approx 134{,}06$

$$\begin{array}{r} 134{,}0607 \\ +\;\;\;0{,}0016 \\ \hline 134{,}0623 \end{array}$$

$134{,}0\underline{6}\boxed{2}3 \approx 134{,}06$

Ответ: ≈ 134,06.

Проверь себя!

Вычислите и округлите до сотых:

$$1{,}715 \cdot 100 + 411{,}2 : 1000 - 0{,}19 : 100$$

Ответ: ≈ 171,91.

Попробуй-ка реши!

1. Расставьте запятые так, чтобы полученные равенства стали верными: а) 124 + 51 = 634; б) 427 – 24 = 187.

Ответ: а) 1,24 + 5,1 = 6,34; б) 42,7 – 24 = 18,7.

2. Дана разность двух чисел. Если уменьшаемое уменьшить на 2,7, а вычитаемое уменьшить на 1,8, то разность станет равной 11,2. На сколько уменьшаемое было больше вычитаемого?

Ответ: на 12,1.

Алгоритм 78 Деление десятичной дроби на десятичную дробь

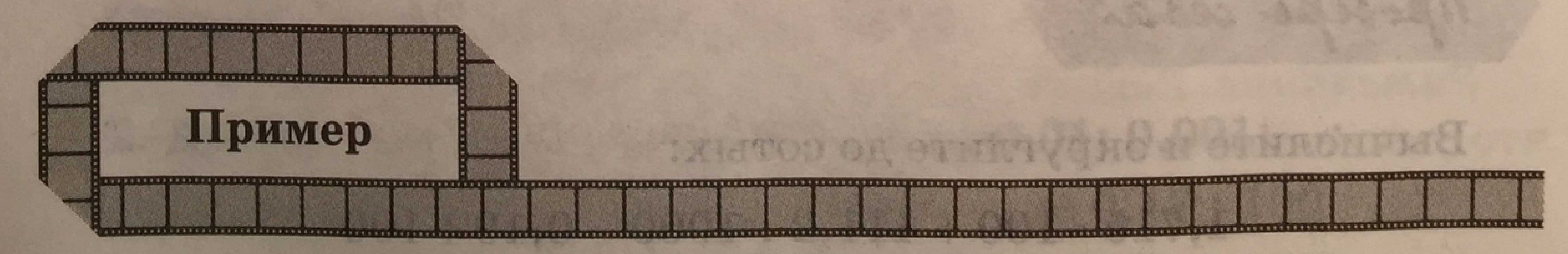
Замечание. В основе деления десятичной дроби на десятичную дробь лежит деление десятичной дроби на натуральное число.

① Замените делитель натуральным числом, для чего перенесите в нем запятую вправо на столько цифр, сколько их в делителе после запятой.

② Перенесите в делимом запятую вправо на столько же цифр, на сколько перенесли в делителе. В случае если в делимом цифр не хватает, то припишите справа нули, применяя основное свойство дроби:

$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot 10^n}{b \cdot 10^n}$, или $a : b = (a \cdot 10^n) : (b \cdot 10^n)$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$

③ Разделите полученное число на натуральное.



Вычислите: а) 0,327 : 0,03; б) 4,5 : 0,125; в) 3,876 : 0,01.

Решение.

а) 0,327 : 0,03 = 32,7 : 3 = 10,9 | , (→) на 2 знака
б) 4,5 : 0,125 = 4500 : 125 = 36 | , (→) на 3 знака
в) 3,876 : 0,01 = 387,6 : 1 = 387,6 | , (→) на 2 знака

Ответ: а) 10,9; б) 36; в) 387,6.

Внимание! Помните, что

$$a : 1 = a$$

$$a : a = 1 \ (a \neq 0)$$

$$1 : \frac{1}{a} = a \ (a \neq 0)$$

Не делите на 0!

Проверь себя!

Выполните деление чисел:

а) 0,515 : 0,05 б) 2,728 : 0,44 в) 71,55 : 0,0045

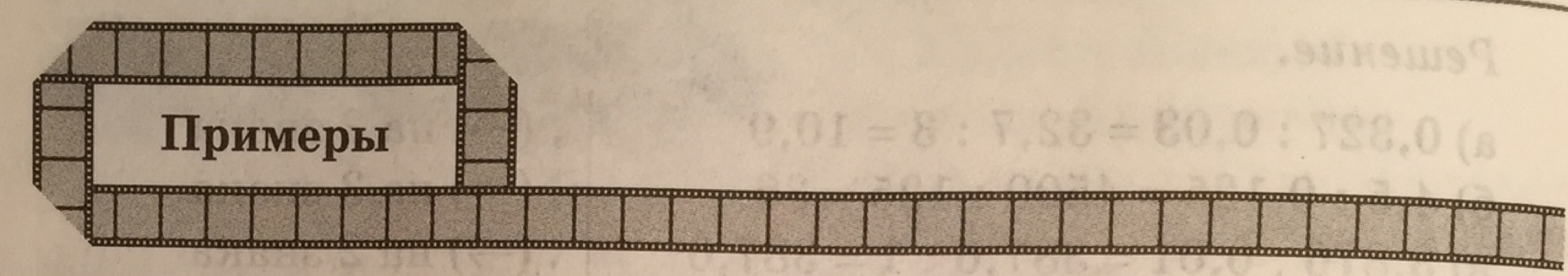
Ответ: а) 10,3; б) 6,2; в) 15 900.

Решение примеров на все действия с десятичными дробями

Полезный совет

Чтобы решить пример на все действия с десятичными дробями, надо:

1) определить порядок действий;
2) каждое действие выполнить по своему алгоритму.



Примеры

1. Выполните действия:

$$((3{,}5 \overset{1}{\cdot} 0{,}74 \overset{3}{-} 9{,}8 \overset{2}{\cdot} 0{,}05) \overset{4}{:} 0{,}7) \overset{6}{\cdot} (3000 \overset{5}{:} 1000) = 13{,}2$$

Решение.

1) $3{,}5 \cdot 0{,}74 = 2{,}590 = 2{,}59$
2) $9{,}8 \cdot 0{,}05 = 0{,}490 = 0{,}49$
3) $2{,}59 + 0{,}49 = 3{,}08$
4) $3{,}08 : 0{,}7 = 30{,}8 : 7 = 4{,}4$
5) $3000 : 100 = 3$
6) $4{,}4 \cdot 3 = 13{,}2$

$$\begin{array}{r} \times \; 3{,}5 \\ 0{,}74 \\ \hline 140 \\ + \; 2\,45 \\ \hline 2{,}590 \end{array}$$

2. Решите уравнение $(41{,}9 - y) : 4{,}7 = 3{,}5$.

Решение.

$$\underbrace{(41{,}9 - y)}_{x} : \underbrace{4{,}7}_{a} = \underbrace{3{,}5}_{b}$$

$41{,}9 - y = 3{,}5 \cdot 4{,}7$

$$\underbrace{41{,}9}_{c} - \underbrace{y}_{y} = \underbrace{16{,}45}_{d}$$

$y = 41{,}9 - 16{,}45$

$y = 25{,}45$

Ответ: 25,45.

Если $x : a = b$, то $x = b \cdot a$

Если $c - y = d$, то $y = c - d$

$$\begin{array}{r} \times \; 3{,}5 \\ 4{,}7 \\ \hline 2\,4\,5 \\ + \; 14\,0 \\ \hline 16{,}4\,5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} - \; \dot{4}1{,}90 \\ 16{,}45 \\ \hline 25{,}45 \end{array}$$

Проверь себя!

Выполните действия:

$$(20{,}5 - 0{,}03) \cdot 2{,}05 + 1{,}025 : 0{,}25$$

Ответ: 46,0635.

Среднее арифметическое нескольких чисел

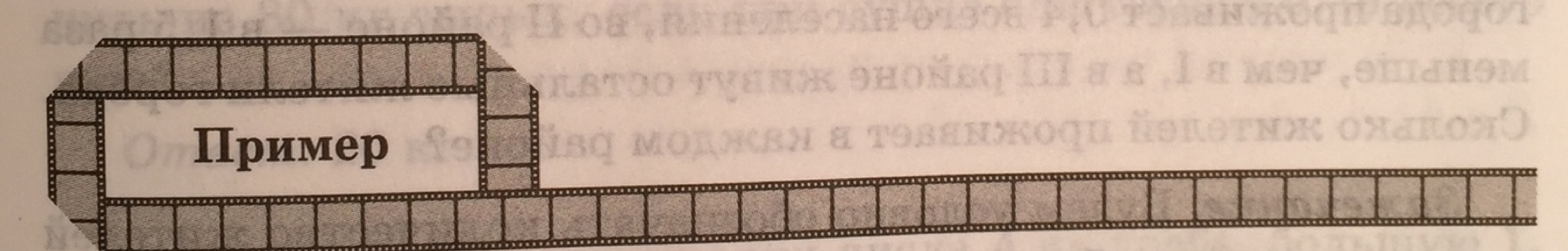
Среднее арифметическое нескольких чисел есть число, которое получится, если сумму этих чисел разделить на количество слагаемых:

$\frac{a+b}{2}$; $\frac{a+b+c}{3}$; $\frac{a+b+c+d}{4}$; ..., где a, b, c, d — данные числа

Алгоритм 79 Нахождение среднего арифметического нескольких чисел

① Сложите данные числа.

② Разделите полученную сумму на натуральное число, равное количеству данных чисел.



Найдите среднее арифметическое чисел 529,69; 530,701; 545,4; 500,207. Округлите результат до сотых долей.

Решение.

(529,69 + 530,701 + 545,4 + 500,207) : 4 ≈ 526,50

1) $\begin{array}{r} +\,529{,}690 \\ 530{,}701 \\ \hline 1060{,}391 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} +\,1060{,}391 \\ 545{,}400 \\ \hline 1605{,}791 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} +\,1605{,}791 \\ 500{,}207 \\ \hline 2105{,}998 \end{array}$

4) 2105,998 : 4 = 526,4995

5) 526,4995 ≈ 526,50

Ответ: 526,50 — среднее арифметическое данных чисел с точностью до сотых.

Проверь себя!

Задача. За первый час пути турист прошел 5,1 км, за второй — 5,4 км, за третий — 4,8 км. С какой средней скоростью шел турист, если за эти 3 ч он прошел все расстояние?

Ответ: 5,1 км/ч.

Нахождение части от числа

Чтобы найти **часть от числа**, выраженную дробью, нужно это **число умножить на данную дробь.**

Задача. В городе проживает 840 000 человек. В I районе этого города проживает 0,4 всего населения, во II районе — в 1,5 раза меньше, чем в I, а в III районе живут остальные жители города. Сколько жителей проживает в каждом районе?

Замечание. Будем условно обозначать количество жителей в каждом районе буквами a, b, c. Запишите краткое условие задачи.

Дано:

I р-н	a жителей	0,4 от 840 000	Всего 840 000 жителей
II р-н	b жителей	$b < a$ в 1,5 раза	
III р-н	c жителей	Остальные жители	

Найти число жителей в I, II, III районах.

Решение.

Общая формула решения: $a + b + c = 840\,000$

Пусть c — число жителей в III районе

$a = 840\,000 \cdot 0{,}4 = 336\,000$ (жителей) — в I районе	$a = A \cdot \frac{m}{n}$ (часть от числа)

$b = a : 1{,}5 = 336\,000 : 1{,}5 = 224\,000$ (жителей) — во II районе	$b < a$ в 1,5 раза $b = a : 1{,}5$
Подставьте a, b, c в формулу решения:	
$336\,000 + 224\,000 + c = 840\,000$ $560\,000 + c = 840\,000$	$a + x = b$
$c = 840\,000 - 560\,000$ $c = 280\,000$	$x = b - a$

Ответ: в I районе проживает 336 000 жителей, во II районе — 224 000 жителей, в III районе — 280 000 жителей.

Проверь себя!

Задача. Сколько килограммов сушеных яблок можно получить из 80 кг сырых, если при сушке они теряют 0,75 своего веса?

Ответ: 20 кг.

Внимание! При умножении числа A на дробь, большую 1, число A увеличивается, а при умножении на дробь, меньшую 1, число A уменьшается.

Нахождение числа по его части

Чтобы найти число A по его части B, выраженной дробью, нужно число B разделить на правильную дробь.

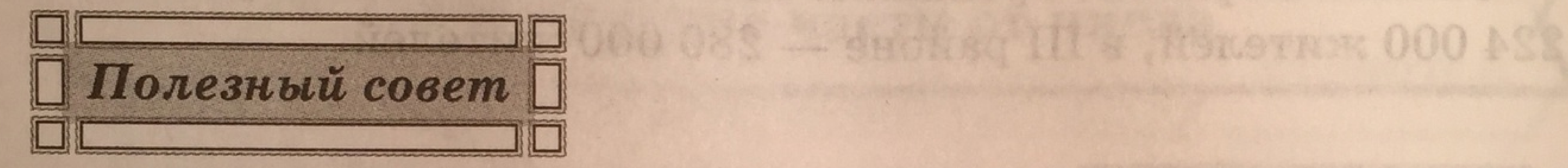
Например, если число 45 составляет 0,15 всего числа, то само число равно $45 : 0{,}15 = 4500 : 15 = 300$

Проверь себя!

Задача. Сухие травы для чая весом 1,5 кг, что составляет 0,12 от свежих трав. Сколько килограммов свежих трав для чая собрано?

Ответ: 12,5 кг.

Решение задач на нахождение части от числа и числа по его части



Если дано все число, то его часть находится умножением на правильную дробь.

Если B — часть всего числа, выраженная правильной дробью, то все число находите делением числа B на эту дробь.

Если число A в n раз больше числа B ($n > 1$), то $A = B \cdot n$, или $B = A : n$.

Например:

1. Найдите 0,3 числа 15.

Решение.

Найдем часть числа:

$15 \cdot 0,3 = 4,5$

2. Число 15 составляет 0,3 всего числа. Найдите это число.

Решение.

Найдем число по его части:

$15 : 0,3 = 150 : 3 = 50$

3. Число B, равное 15, в 1,5 раза больше числа A. Найдите A.

Решение.

$A < B$ в 1,5 раза, значит, $A = 15 : 1,5 = 150 : 15 = 10$

Задача 1. Найдите разность двух чисел, если вычитаемое равно 1,08 и составляет 0,09 от уменьшаемого.

Дано:

уменьшаемое	$a > b$	
вычитаемое	$b = 1{,}08$	0,09 от a

Найти $a - b$.

Решение.

Общая формула решения: $a - b = c$

1) $a = 1{,}08 : 0{,}09 = 108 : 9 = 12$	$a = b : 0{,}09$
2) $c = a - b = 12 - 1{,}08 = 10{,}92$	(число по его части)

Ответ: $a - b = 10{,}92$.

Задача 2. Масса сахара, полученного из сахарной свеклы, составляет 0,16 от массы сахарной свеклы. Сколько сахара получено из: а) 0,75 т; б) 10 т сахарной свеклы?

Дано:

свекла	a тонн	0,75 т, 10 т	$b = a \cdot 0{,}16$
сахар	b тонн	0,16 от a	(часть от числа)

Найти количество тонн сахара, полученного из свеклы.

Решение.

Общая формула решения: $b = a \cdot 0{,}16$

а) $b = 0{,}75 \cdot 0{,}16 = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{25} = \frac{12}{100} = 0{,}12$ (т)

б) $b = 10 \cdot 0{,}16 = 1{,}6$ (т)

$0{,}75 = \frac{3}{4}$; $0{,}16 = \frac{4}{25}$

(проще вычисления в обыкновенных дробях)

Ответ: а) из 0,75 т свеклы получено 0,12 т сахара;
б) из 10 т свеклы получено 1,6 т сахара.

Задача 3. Длина одной стороны треугольника равна 5,4 см, и она составляет 0,27 периметра треугольника. Найдите длины двух других сторон треугольника, если длина одной из них составляет 0,35 периметра.

Дано:

I сторона	$a = 5{,}4$	0,27 от P	Найти число по его части
II сторона	b	0,35 от P	Найти часть числа
III сторона	c		

Найти a, b, c.

Решение.

Общая формула решения: $P = a + b + c$

1) $P = a : 0{,}27 = 5{,}4 : 0{,}27 = 540 : 27 = 20$ (см)	$a = 5{,}4$ см, что составляет $0{,}27\ P$
2) $b = P \cdot 0{,}35 = 20 \cdot 0{,}35 = 7{,}00 = 7$ (см)	$b = P \cdot 0{,}35$ (часть от числа)
3) подставьте в формулу a, b и P и найдите c: $20 = 5{,}4 + 7 + c$; $20 = 12{,}4 + c$; $c = 20 - 12{,}4$; $c = 7{,}6$	$a = b + x$ $x = a - b$

Ответ: $a = 5{,}4$ см, $b = 7$ см; $c = 7{,}6$ см.

Проверь себя!

Задача 1. Ледяная глыба плавает в воде, причем объем ее подводной части равен 1 000 000 м^3 и составляет 0,8 объема всей глыбы. Найдите объем ледяной глыбы.

Ответ: 1 250 000 м^3.

Задача 2. Найдите длину отрезка, если длина 0,4 этого отрезка равна 1,6 м.

Ответ: 4 м.

Попробуй не реши!

Задача. Сколько высушили винограда, если из него получили 4,2 ц изюма? Виноград теряет при сушке примерно 0,7 своей массы.

Ответ: 14 ц винограда.

Попробуй-ка реши!

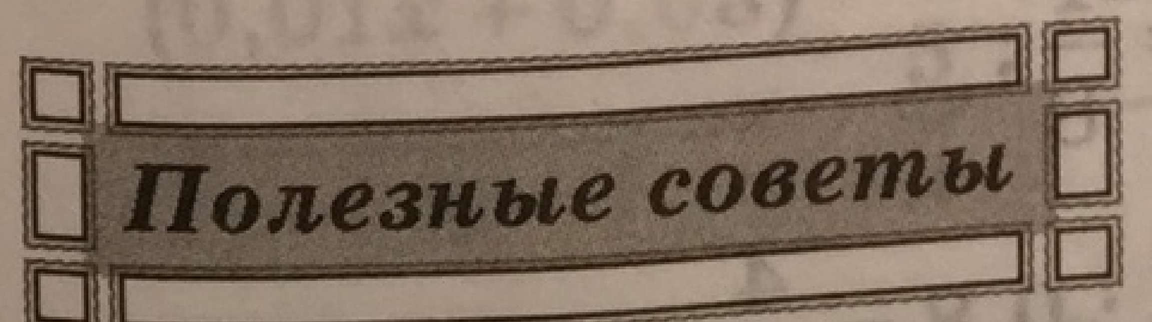
Задача 1. Сплав содержит медь и цинк. Масса меди составляет 0,61 массы сплава, а масса цинка — 0,32 массы сплава. Сколько меди и сколько цинка содержится в 2,3 кг сплава? (Ответ округлите до десятых.)

Ответ: ≈ 1,4 кг меди, ≈ 0,7 кг цинка.

Задача 2. Человек продавал яблоки. Первый покупатель купил половину всех яблок и еще 15 штук, второй купил 0,6 остатка и последние 10 штук. Сколько яблок было у продавца первоначально?

Ответ: 80 штук.

Совместные действия с десятичными и обыкновенными дробями



1. Определите порядок действий, помня о следующем:

а) если в примере нет скобок, то выполните сначала действие III ступени (возведение в степень), далее (по порядку) действия

II ступени (умножение, деление) и, наконец (по порядку), действия I ступени (сложение, вычитание);

б) если в примере есть скобки, то сначала выполните действия в скобках в соответствии с предыдущим пунктом.

2. Если возможно, примените законы умножения и сложения.

$$a + b = b + a$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

3. Если хотя бы одна обыкновенная дробь содержит знаменатель, который нельзя записать единицей с нулями (нельзя перевести в конечную десятичную дробь), то переводите десятичную дробь (если таковая имеется) в обыкновенную и выполняйте действия с обыкновенными дробями.

4. Полезно знать на память некоторые случаи перевода десятичных дробей в обыкновенные и наоборот:

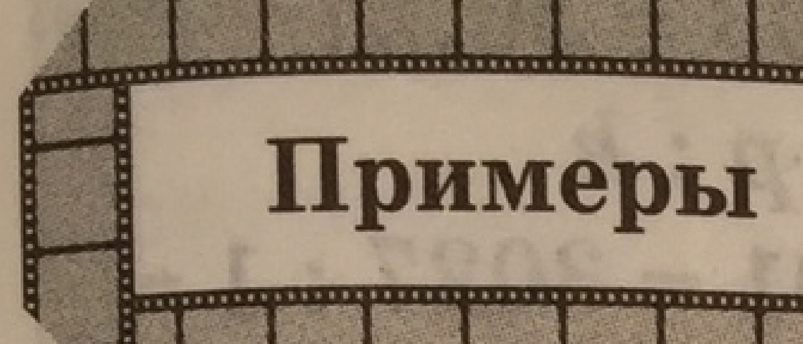
$$0{,}5 = \frac{1}{2};\ 0{,}25 = \frac{1}{4};$$

$$0{,}75 = \frac{3}{4};\ 0{,}04 = \frac{1}{25};$$

$$0{,}02 = \frac{1}{50};\ 0{,}125 = \frac{1}{8};$$

$$0{,}2 = \frac{1}{5};\ 0{,}4 = \frac{2}{5};\ 0{,}6 = \frac{3}{5};\ 0{,}8 = \frac{4}{5};$$

$$0{,}375 = \frac{3}{8};\ 0{,}05 = \frac{1}{20}$$



1. Выполните действия:

$$12{,}5\cdot \overset{2}{} 2\frac{1}{2}\overset{4}{-}\left(4{,}128\overset{1}{-}3\frac{3}{5}\right)\overset{3}{:}\frac{2}{5}=29{,}93$$

Решение.

1) $4{,}128-3\frac{3}{5}=4{,}128-3{,}6=0{,}528$

$$\begin{array}{r} -\,4{,}128 \\ 3{,}600 \\ \hline 0{,}528 \end{array}$$

2) $12{,}5\cdot 2\frac{1}{2}=12\frac{1}{2}\cdot 2\frac{1}{2}=\frac{25}{2}\cdot\frac{5}{2}=\frac{125}{4}=31\frac{1}{4}$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

3) $0{,}528:\frac{2}{5}=0{,}528:0{,}4=5{,}28:4=1{,}32$

4) $31\frac{1}{4}-1{,}32=31{,}25-1{,}32=29{,}93$

$$\begin{array}{r} -\,31{,}25 \\ 1{,}32 \\ \hline 29{,}93 \end{array}$$

Ответ: 29,93.

2. Решите уравнение $(0{,}01x+0{,}03)\cdot\frac{2}{5}=12{,}12.$

Решение.

$$\underbrace{(0{,}01x+0{,}03)}_{y}\cdot\underbrace{\frac{2}{5}}_{a}=\underbrace{12{,}12}_{b}$$

Если $y\cdot a=b$, то $y=b:a$

$$0{,}01x+0{,}03=12{,}12:\frac{2}{5}$$

$$12{,}12:\frac{2}{5}=12{,}12:0{,}4=$$
$$=121{,}2:4=30{,}3$$

$$\underbrace{0{,}01x}_{z}+\underbrace{0{,}03}_{n}=\underbrace{30{,}3}_{m}$$

$z+n=m$, тогда $z=m-n$

$0{,}01 \cdot x = 30{,}3 - 0{,}03$
$0{,}01 \cdot x = 30{,}27$
$x = 30{,}27 : 0{,}01$
$x = 3027$

$30{,}30 - 0{,}03 = 30{,}27$
$kx = p,\ x = p : k$
$30{,}27 : 0{,}01 = 3027 : 1 =$
$= 3027$

Ответ: 3027.

Проверь себя!

Выполните действия:

а) $\dfrac{34{,}2 : 6 - 3\frac{1}{3} \cdot 0{,}3 + \frac{1}{4}}{7{,}5 : 0{,}5}$

б) $((367{,}8 : 0{,}3 - 3^3) + 3{,}1 : 0{,}62) : \dfrac{7}{10}$

Ответ: а) 0,33; б) 1720.

ПРОЦЕНТЫ

Процентом числа называется сотая часть этого числа. Обозначают процент знаком %. Читают так:

5% — пять процентов; 1% — один процент

$$1\% = \frac{1}{100}, \text{ или } 1\% = 0{,}01$$

Например: 1 копейка равна $\frac{1}{100}$ рубля, или равна 1%

$$\text{Если } 1\% = \frac{1}{100}, \text{ то } 100\% = 1$$

Запомни!

$$1 = 100\%;\ \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%;\ \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%;\ \frac{1}{10} = 0{,}1 = 10\%;$$

$$\frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%;\ \frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\%;\ \frac{4}{5} = 0{,}8 = 80\%;$$

$$\frac{1}{20} = 0{,}05 = 5\%;\ \frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\%;\ \frac{3}{5} = 0{,}6 = 60\%$$

Полезные советы

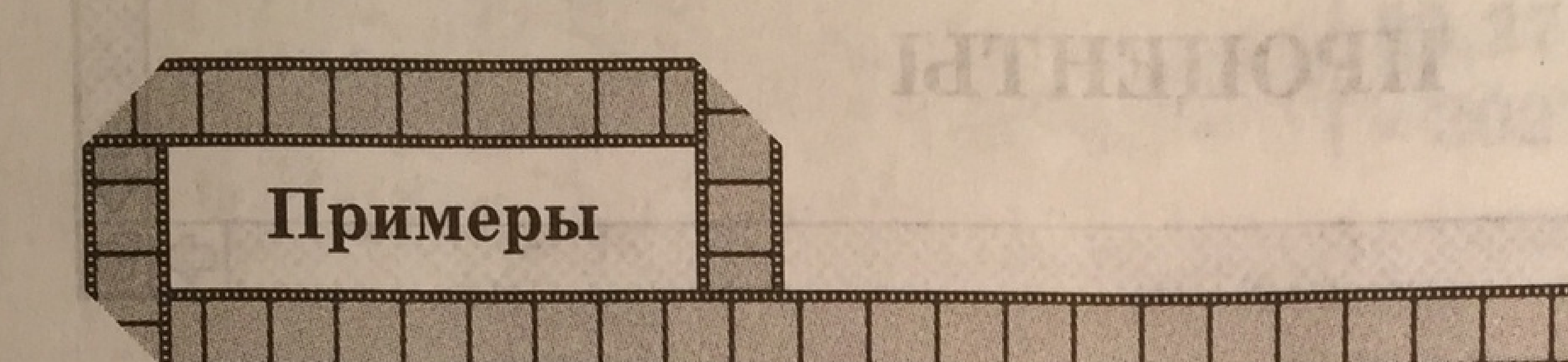
1. Чтобы обратить в проценты десятичную или обыкновенную дробь, умножьте ее на 100%.

2. Чтобы проценты записать десятичной дробью, надо число процентов разделить на 100 (или умножить число на 0,01).

Например: $0{,}003 = 0{,}003 \cdot 100\% = 0{,}3\%$

$28\% = 28 : 100 = 0{,}28$

3. $\frac{3}{5} = \frac{3}{5} \cdot 100\% = \frac{3 \cdot 100\%}{5} = 60\%$



Сколько килограммов составляет от тонны:

1%; 9%; 65%; 100%; 120%; 200%?

Решение.

1) 1 т = 1000 кг

$1\% = \frac{1}{100}$, значит, 1000 : 100 = 10, т. е. 10 кг — 1% 1 т

2) $10 \cdot 9 = 90$ (кг) — 9% 1 т

3) $10 \cdot 65 = 650$ (кг) — 65% 1 т

4) $10 \cdot 100 = 1000$ (кг) — 100% 1 т

5) $10 \cdot 120 = 1200$ (кг) — 120% 1 т

6) $10 \cdot 200 = 2000$ (кг) — 200% 1 т

Алгоритм 80 Нахождение n% числа A

I способ

① Найдите 1% числа A, для этого разделите A на 100, получите $\frac{A}{100}$ (это 1% числа A).

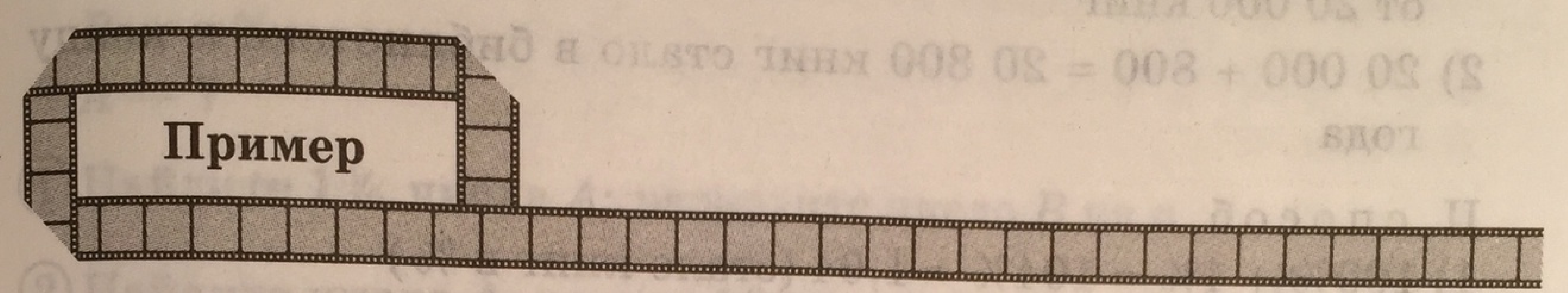
② Умножьте $\frac{A}{100}$ на n, получите $\frac{An}{100}$ (это n% числа A).

II способ

① Переведите n% в десятичную дробь, получите $0{,}01 \cdot n$.

② Умножьте A на $0{,}01 \cdot n$.

Замечание. Задача на нахождение $n\%$ числа A — это задача на нахождение части от числа. Чтобы найти $n\%$ данного числа достаточно это число разделить на 100 и результат умножить на n.



Найдите 18% числа 500.

Решение.

I способ

1) 500 : 100 = 5 — это 1% числа 500

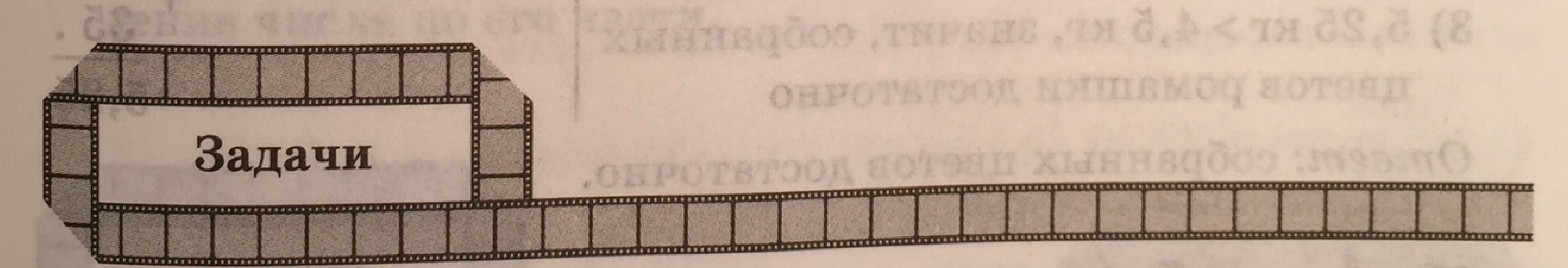
2) 5 · 18 = 90 — это 18% числа 500

II способ

1) 18% = 18 : 100 = 0,18

2) 500 · 0,18 = 90 — это 0,18 от 500

Ответ: 18% числа 500 равны 90.



1. Из молока получаются сливки, масса которых составляет 25% массы молока. Сколько сливок получится из 100 л молока?

Решение.

100 · 0,25 = 25 (л) | 25% = 0,25

Ответ: из 100 л молока получится 25 л сливок.

2. В библиотеке 20 000 книг. За год число книг увеличилось на 4%. Сколько книг стало в библиотеке к концу года?

Решение.

I способ

1) $20\,000 \cdot 0{,}04 = 800$ книг — это 4% от 20 000 книг | $4\% = 0{,}04$

2) $20\,000 + 800 = 20\,800$ книг стало в библиотеке к концу года

II способ

1) $100\% + 4\% = 104\% = 1{,}04$ (стало книг в %)

2) $20\,000 \cdot 1{,}04 = 20\,800$ (книг стало в библиотеке)

Ответ: в библиотеке к концу года стало 20 800 книг.

3. Ученики собрали 35 кг цветов ромашки. Достаточно ли этого количества, чтобы получить 4,5 кг сухих цветов, если при сушке теряется до 85% первоначальной массы?

Решение.

1) $100\% - 85\% = 15\%$ (сухих цветов)

2) $35 \cdot 0{,}15 = 5{,}25$ (кг) сухих цветов (15% 35 кг)

3) 5,25 кг > 4,5 кг, значит, собранных цветов ромашки достаточно

$15\% = 0{,}15$

$$\begin{array}{r} \times\ 35 \\ 0{,}15 \\ \hline 175 \\ +\ 35\ . \\ \hline 5{,}25 \end{array}$$

Ответ: собранных цветов достаточно.

Проверь себя!

1. Запишите десятичной дробью проценты:

1%; 6%; 45%; 123%; 2,5%

Ответ: 0,01; 0,06; 0,45; 1,23; 0,025.

2. Запишите в процентах обыкновенные дроби:

$$\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{10};\ \frac{1}{20};\ \frac{1}{50};\ \frac{17}{40}$$

Ответ: 50%; 25%; 20%; 10%; 5%; 2%; 42,5%.

Алгоритм 81 Нахождение числа по данным его процентам

I способ

B — $n\%$

A — ?

① Найдите 1% числа A; разделите число B на n.

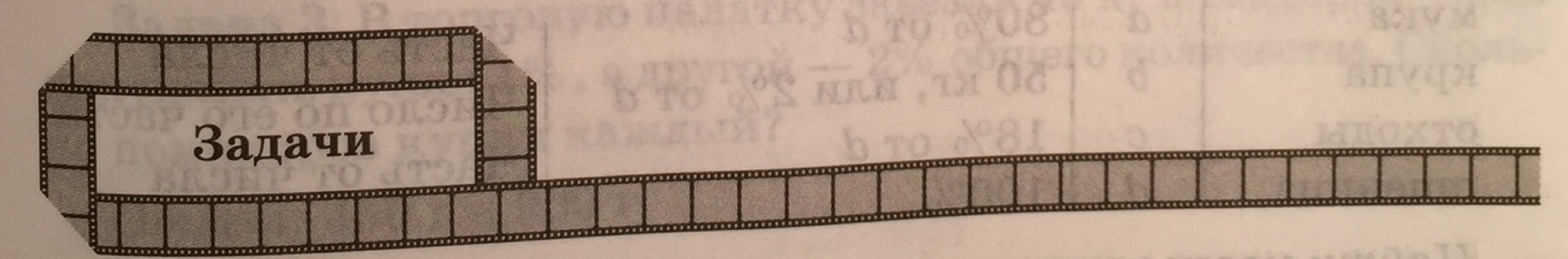
② Найдите число A, равное 100%, по формуле $A = \frac{B}{n} \cdot 100$.

Замечание. Удобно записать так: $A = (B : n) \cdot 100$. Чтобы найти число по его процентам, достаточно известную часть числа разделить на число процентов и результат умножить на 100.

II способ

① Переведите $n\%$ в десятичную дробь: $n\% = 0{,}01 \cdot n$.

② Разделите B на эту дробь, получите $A = B : (0{,}01n)$. Заметим, что задача сводится к решению задачи на нахождение числа по его части.



1. В классе 18 девочек, что составляет 45% числа всех учащихся класса. Сколько всего учеников в классе?

Решение.

I способ $18 : 45 \cdot 100 = 40$ — в классе всего 40 учеников (это 100%)	$B = 18$ $n = 45\%$ $A = (B : n) \cdot 100$

II способ

$18 : 0{,}45 = 40$ — в классе всего 40 учеников (это 100%)	$45\% = 0{,}45$

Ответ: в классе всего 40 учеников.

Внимание!

Если $n\% < 100\%$, то $A \cdot n\% < A$, а $A : n\% > A$.

2. Масса сушеной малины составляет 15% массы свежей. Сколько взяли свежей малины, если получили 3 кг сухой?

Решение.

$3 : 0{,}15 = 300 : 15 = 20$ (кг) свежей малины	$15\% = 0{,}15$ $15\% < 100\%$ $A : n\% > A$

Ответ: 20 кг свежей малины.

3. При переработке пшеницы мука составляет 80%, манная крупа — 2%, а отходы — 18%. Сколько будет муки и отходов, если при переработке получено 50 кг манной крупы?

Дано:

мука	a	80% от d	Часть от числа
крупа	b	50 кг, или 2% от d	Число по его части
отходы	c	18% от d	Часть от числа
пшеница	d	100%	

Найти массу муки и отходов.

Решение.

1) $50 : 0{,}02 = 5000 : 2 = 2500$ (кг) — пшеница	2% — 50 кг $2\% = 0{,}02$
2) $2500 \cdot 0{,}8 = 2000$ (кг) — мука	$80\% = 0{,}8$
3) $2500 \cdot 0{,}18 = 450$ (кг) — отходы	$18\% = 0{,}18$

Ответ: 2000 кг муки и 450 кг отходов.

4. Токарь изготовил 132 детали, выполнив план на 110%. Сколько деталей должен сделать токарь по плану?

Решение.

132 : 1,1 = 1320 : 11 = 120 (дет.) — по плану | 110% = 1,1

Ответ: токарь должен был сделать по плану 120 деталей.

Внимание!

Если $n\% > 100\%$, то $A \cdot n\% > A$; $A : n\% < A$.

Попробуй не реши!

Задача 1. Мясо при варке теряет 30% веса. Сколько надо взять сырого мяса, чтобы получить 560 г вареного?

Ответ: 800 г.

Задача 2. 5% одного числа равны 11. Другое число составляет 18% первого. Найдите их среднее арифметическое.

Ответ: 129,8.

Задача 3. В торговую палатку завезли 45 кг помидоров. Один покупатель купил 1%, а другой — 2% общего количества. Сколько помидоров купил каждый?

Ответ: 450 г и 900 г.

Попробуй-ка реши!

Задача. Первое число составляет 80% третьего, а второе — 30% третьего. Найдите эти три числа, если их среднее арифметическое равно 21,21.

Ответ: 24,24; 9,09; 30,3.

Полезный совет

При решении задач на проценты находите сначала 1% (обозначим его числом P), а затем смотрите по смыслу: если надо найти $n\%$ числа A, то $P \cdot n\%$; если надо найти все число A, то $P \cdot 100\%$.

Отношение

Частное $a : b$, или дробь $\frac{a}{b}$, где $b \neq 0$, называют *отношением* двух чисел a и b.

Отношение показывает, во сколько раз первое число больше второго (если $a > b$) или какую часть первое число составляет от второго (если $a < b$).

Например, скорость 12 км/ч больше скорости 4 км/ч в 3 раза, так как $12 : 4 = 3$

Если на карте отрезок 1 см соответствует 10 км на местности, то этот отрезок на карте составляет $\frac{1}{1000000}$ от 10 км, так как 10 км = 1 000 000 см.

Замечание. Отношение длины отрезка на карте к соответствующему расстоянию на местности называется *масштабом*. В нашем примере $M = \frac{1}{1000000}$ (причем наименования при делении одноименные).

Процентное отношение чисел

Отношение чисел, выраженное в процентах, называется процентным *отношением*. Оно показывает, сколько процентов одно число составляет от другого.

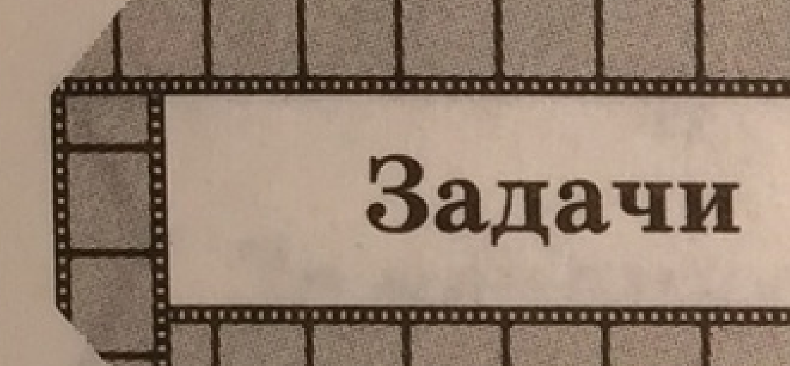
Алгоритм 82. Нахождение процентного отношения двух величин a и b

① Найдите отношение двух величин: $a : b$.

② Умножьте полученный результат на 100%.

Замечание. Можно записать эти два действия в одно:

$$\frac{a}{b} \cdot 100\%$$



Задачи

1. В 500 г воды растворили 20 г соли. Найдите процентное отношение соли в растворе.

Дано:

вода	a	500 г	500 г + 20 г = 520 г — раствор
соль	b	20 г	

Найти процентное отношение соли в растворе.

Решение.

$$\frac{20 \cdot 100\%}{520} \approx 4\%$$

```
 2000,0 | 520
-1560   | 3,8...
  4400
 -4160
   240 (ост)
```

3,8% ≈ 4%

Ответ: получили ≈ 4%-ный раствор соли.

2. При выпечке хлеба из 800 кг муки получили 1 т 80 кг хлеба. Сколько процентов составляет припек?

Решение.

1) $\frac{1080 \cdot 100\%}{800} = 135\%$ — хлеб

1 т 80 кг = 1080 кг

2) 135% – 100% = 35% — припек

Ответ: припек составляет 35%.

Проверь себя!

Задача. Сколько процентов соли содержит раствор, приготовленный из 35 г соли и 175 г воды?

Ответ: ≈ 17%.

Пропорция

Равенство двух отношений называется *пропорцией*.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, или $a : b = c : d$, где $a, b, c, d \neq 0$

$a : b = c : d$

средние (b, c)

крайние члены (a, d)

Свойства пропорции

1. Если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $a \cdot d = b \cdot c$ (основное свойство пропорции).

Произведение крайних членов пропорции равно произведению средних членов.

Например: $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$, $2 \cdot 10 = 5 \cdot 4$

2. Пропорция верна, если поменять местами:

а) средние члены (если $a : b = c : d$, то $a : c = b : d$)

б) крайние члены (если $a : b = c : d$, то $d : b = c : a$)

в) крайние члены на средние члены (если $a : b = c : d$, то $b : a = d : c$)

3. Если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

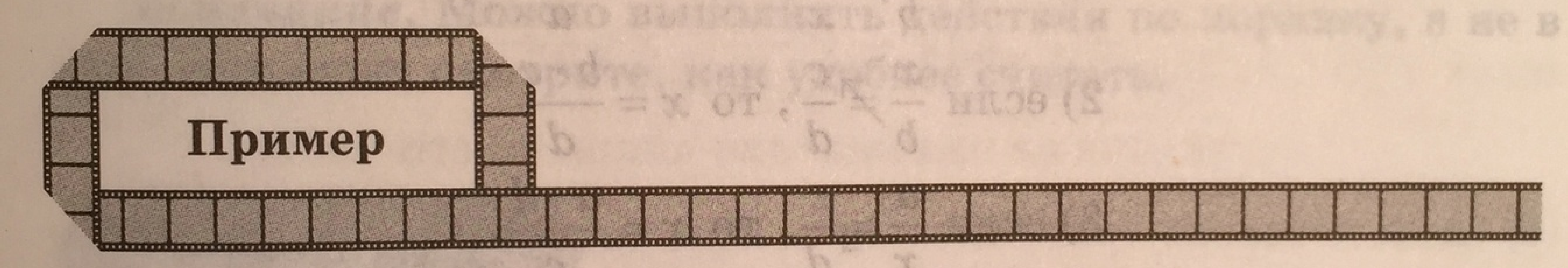
4. Если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $a>b$, $c>d$, то $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

5. Если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$

6. Если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $a>b$, $c>d$, то $\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}$

7. Если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $a>b$, $c>d$, то $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

Замечание. Выполнение свойств 3—7 проверьте на примерах и с помощью свойства 1.



Найдите равные отношения и составьте пропорции:

$26:13$; $2\frac{1}{2}:2$; $8:4$; $\frac{1}{2}:\frac{2}{5}$; $3:10$; $2{,}1:7$; $3:0{,}3$; $20:4$

Решение.

Упростим каждое из отношений:

$\frac{26}{13}=\frac{2}{1}$; $2\frac{1}{2}:2=\frac{5}{4}$; $\frac{8}{4}=\frac{2}{1}$; $\frac{1}{2}:\frac{2}{5}=\frac{5}{4}$; $3:10=\frac{3}{10}$; $\frac{2{,}1}{7}=\frac{21}{70}=\frac{3}{10}$;

$\frac{3}{0{,}3}=\frac{30}{3}=\frac{10}{1}$; $\frac{20}{4}=\frac{5}{1}$

Получили 3 пары равных отношений:

$\frac{26}{13}$ и $\frac{8}{4}$; $2\frac{1}{2}:2$ и $\frac{1}{2}:\frac{2}{5}$; $\frac{3}{10}$ и $\frac{2{,}1}{7}$

Ответ: можно составить 3 пропорции:

$\frac{26}{13}=\frac{8}{4}$; $2\frac{1}{2}:2=\frac{1}{2}:\frac{2}{5}$; $\frac{3}{10}=\frac{2{,}1}{7}$

Алгоритм 83 Нахождение неизвестного члена пропорции

Пусть x — неизвестный член одной из пропорций:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{x};\quad \frac{x}{b}=\frac{c}{d};\quad \frac{a}{x}=\frac{c}{d};\quad \frac{a}{b}=\frac{x}{d}$$

① **Перемножьте пару известных крайних (или средних) членов пропорции, используя для удобства стрелки ↗ ↘.**

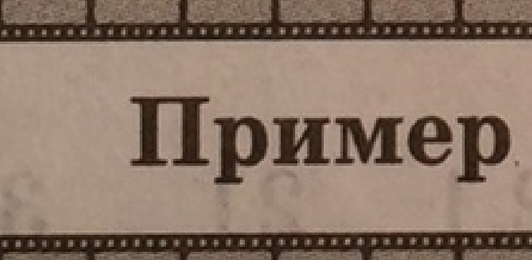
② **Разделите полученное произведение на третий известный средний (или крайний) член пропорции и получите x:**

1) если $\frac{a}{b}\nearrow\frac{c}{x}$, то $x=\frac{b\cdot c}{a}$

2) если $\frac{x}{b}\nearrow\frac{c}{d}$, то $x=\frac{b\cdot c}{d}$

3) если $\frac{a}{x}\searrow\frac{c}{d}$, то $x=\frac{a\cdot d}{c}$

4) если $\frac{a}{b}\searrow\frac{x}{d}$, то $x=\frac{a\cdot d}{b}$



Найдите неизвестный член пропорции:

а) $10:\frac{1}{8}=x:1\frac{1}{4}$ б) $\frac{x}{105}=\frac{1{,}456}{1{,}05}$

Решение.

а) $10:\frac{1}{8}=x:1\frac{1}{4}$

$x=10\cdot 1\frac{1}{4}:\frac{1}{8}$

Если $a:b=x:d$, то $x=\frac{a\cdot d}{b}$

$x = \frac{10 \cdot 5 \cdot \not{8}^2}{\not{4}_1 \cdot 1}$, $x = 100$

б) $\frac{x}{105} = \frac{1,456}{1,05}$

$x = \frac{105 \cdot 1,456}{1,05}$

$x = \frac{105 \cdot 145,6}{105}$

$x = 145,6$

$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$

Если $x : b = c : d$, то $x = \frac{b \cdot c}{d}$

$1,456 : 1,05 = 145,6 : 105$

Замечание. Можно выполнять действия по порядку, а не в одно действие; смотрите, как удобнее считать.

Проверь себя!

Найдите неизвестный член пропорции $15 : x = 1\frac{3}{4} : \frac{1}{5}$.

Ответ: $1\frac{5}{7}$.

Алгоритм 84 Решение задач на проценты с помощью пропорции

Если по условию задачи две величины связаны так, что с увеличением (уменьшением) одной в n раз другая увеличивается (уменьшается) во столько же раз, то такие задачи решаются пропорцией и называются *задачами на прямую пропорциональную зависимость между величинами.*

① Если известно все число A, то примите число A за 100% и запишите: A — 100%.

② Под числом A запишите x, а под 100% — заданные $n\%$, получите такую запись: A — 100%

x — $n\%$

③ Составьте пропорцию и найдите x (это задача на нахождение части от числа):

$$\frac{A}{100} = \frac{x}{n}, \text{ или } \frac{A}{x} = \frac{100}{n}, \text{ тогда } x = \frac{A \cdot n}{100}$$

④ Если число A неизвестно, то примите A за x, получите запись: x — 100%

B — $n\%$

⑤ Составьте пропорцию и найдите x:

$$\frac{x}{100} = \frac{B}{n}, \text{ или } \frac{x}{B} = \frac{100}{n}, \; x = \frac{B \cdot 100}{n}$$

(это задача на нахождение числа по его части)

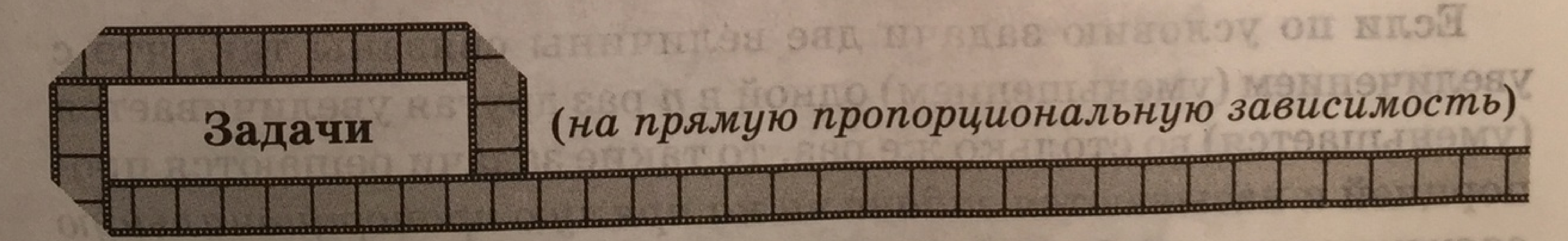
⑥ Если известна часть числа B и $n\%$, составляющие B, а надо найти $p\%$ от числа C (или найти C по $p\%$), то составьте пропорцию и найдите нужную величину:

если B — $n\%$

C — $p\%$,

$$\text{то } \frac{B}{n} = \frac{C}{p}, \textit{ например: } p = \frac{Cn}{B}$$

(Главное, чтобы были даны три известные величины.)



1. Липовый цвет при сушке теряет 74% своей массы. Сколько надо собрать свежего цвета липы, чтобы получить 7,8 кг сушеного?

Решение.

x — 100% (масса свежего цвета)

100% – 74% = 26% (масса сушеного цвета), запишем

x — 100%

7,8 — 26% (находим число по его части)

Получаем пропорцию

$$\frac{x}{100} = \frac{7{,}8}{26},\ x = \frac{7{,}8 \cdot 100}{26},\quad x = \frac{780}{26},\ x = 30$$

Если $\frac{x}{b} = \frac{c}{d}$, то $x = \frac{b \cdot c}{d}$

Ответ: надо собрать 30 кг свежего цвета липы.

2. Известно, что 35% числа равны 105. Чему равны 60% этого же числа?

Решение.

105 — 35%

x — 60%

Получаем пропорцию

$$\frac{105}{35} = \frac{x}{60},\ x = \frac{105 \cdot 60}{35},\ x = 180$$

Если $\frac{a}{b} = \frac{x}{d}$, то $x = \frac{a \cdot d}{b}$

Ответ: 60% числа равны 180.

3. Из 50 кг картофеля получается 7,5 кг крахмала. Сколько крахмала получится из 3,6 т картофеля?

Решение.

50 кг — 7,5 кг

3600 кг — x кг

3,6 т = 3600 кг

Получаем пропорцию

$$\frac{50}{7{,}5} = \frac{3600}{x},\ x = \frac{3600 \cdot 7{,}5}{50},$$

Если $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, то $x = \frac{b \cdot c}{a}$

$x = \frac{360 \cdot 75}{50}$, $x = \frac{360 \cdot 3}{2}$,

$x = 540$

$1{,}5 = \frac{3}{2}$

$\frac{360 \cdot 75}{50} = \frac{360 \cdot 3}{2} = 540$

Ответ: из 3,6 т картофеля получится 540 кг крахмала.

Проверь себя!

Задача 1. Тракторист вспахал 22 га и выполнил план на 110%. Сколько гектаров он должен вспахать по плану?

Ответ: 20 га.

Задача 2. Сколько процентов составляют 35 кг от 50 кг?

Ответ: 70%.

Задача 3. 60% некоторого числа равны 180. Чему равны 15% того же числа?

Ответ: 45.

Попробуй-ка реши!

Задача 1. Разность двух чисел равна 1,4. Известно, что 15% большего числа и 25% меньшего в сумме дают 1,89. Найдите эти числа.

Ответ: 5,6 и 4,2.

Задача 2. Число увеличили на 25%. На сколько процентов надо уменьшить полученное число, чтобы снова получить первоначальное?

Ответ: на 20%.

Алгоритм 85 Решение задач на действия с десятичными дробями

① Запишите кратко условие задачи, обозначая каждую величину буквой.

② Составьте общую формулу решения задачи по ее смыслу.

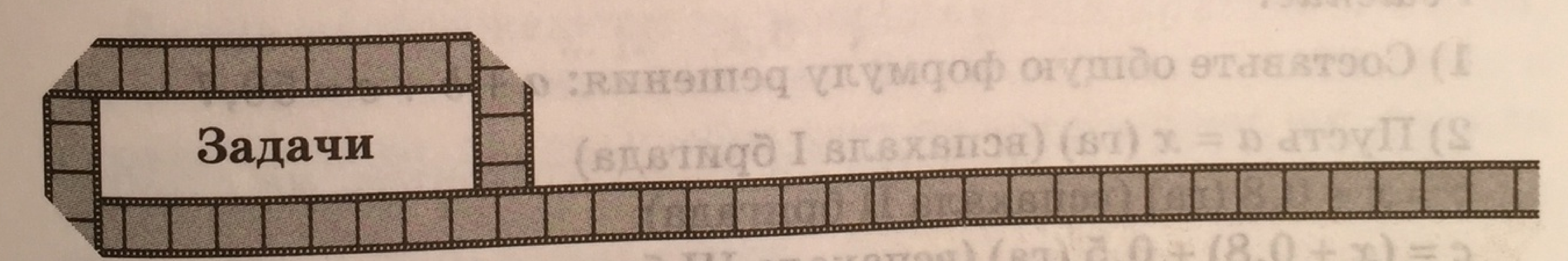
Например, если о величинах известно, что дана их сумма, то формула будет $a + b + c = S$; если одна величина больше или меньше другой, то $a = b \cdot n$ или $b = a - c$ $(b < a)$ и т. д.

③ Выберите по смыслу задачи меньшую величину и обозначьте ее буквой x.

④ Выразите остальные величины через x (или оставьте их числами).

⑤ Подставьте в формулу решения нужные величины и решите уравнение относительно x.

⑥ Ответ запишите полностью по смыслу задачи.



1. Найдите каждое из двух чисел, если известно, что одно из них больше другого в 4,5 раза и на 7,07.

Дано:

I число	a	$a > b$ в 4,5 раза
II число	b	$b < a$ на 7,07 (если $a > b$, то $b < a$)

Найти a и b.

Решение.

1) Составьте общую формулу решения: $a - b = 7{,}07$ (удобнее вычитание, чем деление)

2) Пусть $b = x$ $(b < a)$, тогда $a = 4{,}5 \cdot x$

3) Подставьте a и b в формулу решения:

$4{,}5 \cdot x - x = 7{,}07$	$a - b = 7{,}07$
$3{,}5 \cdot x = 7{,}07$	$ax = b$, то $x = b : a$
$x = 7{,}07 : 3{,}5$	$7{,}07 : 3{,}5 = 70{,}7 : 35 = 2{,}02$

$x = 2{,}02$, тогда $b = 2{,}02$

$a = 7{,}07 + 2{,}02 = 9{,}09$

Ответ: I число равно 9,09; II число равно 2,02.

2. Три бригады трактористов вспахали за день 50,7 га, причем вторая бригада вспахала на 0,8 га больше, чем первая, а третья на 0,5 га больше, чем вторая. Сколько гектаров вспахала каждая бригада за день?

Дано:

I бригада	a га	меньше всех	всего 50,7 га
II бригада	b га	$b > a$ на 0,8 га	
III бригада	c га	$c > b$ на 0,5 га	

Найти, сколько гектаров вспахала каждая бригада за день.

Решение.

1) Составьте общую формулу решения: $a + b + c = 50{,}7$

2) Пусть $a = x$ (га) (вспахала I бригада)

$b = x + 0{,}8$ (га) (вспахала II бригада)

$c = (x + 0{,}8) + 0{,}5$ (га) (вспахала III бригада)

3) Подставьте a, b и c в формулу решения:

$x + (x + 0{,}8) + (x + 0{,}8) + 0{,}5 = 50{,}7$

$x + x + 0{,}8 + x + 0{,}8 + 0{,}5 = 50{,}7$

$\underbrace{3x}_{y} + \underbrace{2{,}1}_{a} = \underbrace{50{,}7}_{b}$	$1 \cdot x + 1 \cdot x + 1 \cdot x = 3x$
$3x = 50{,}7 - 2{,}1$	если $y + a = b$, то $y = b - a$,
$3x = 48{,}6$	$c \cdot x = d$, $x = d : c$
$x = 48{,}6 : 3$	
$x = 16{,}2$	

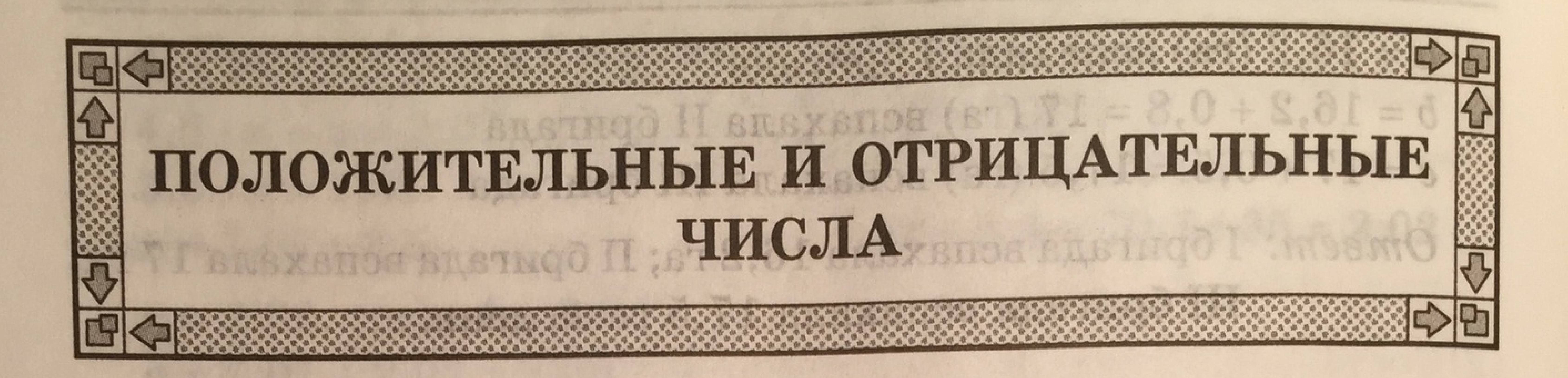
$a = 16{,}2$ (га) вспахала I бригада
$b = 16{,}2 + 0{,}8 = 17$ (га) вспахала II бригада
$c = 17 + 0{,}5 = 17{,}5$ (га) вспахала III бригада

Ответ: I бригада вспахала 16,2 га; II бригада вспахала 17 га; III бригада вспахала 17,5 га за день.

Проверь себя!

Задача. Из двух пунктов, расстояние между которыми 17,5 км, выехали одновременно навстречу друг другу два велосипедиста. Один из них сделал остановку, и поэтому при встрече оказалось, что он проехал в 1,5 раза меньше, чем другой. Какое расстояние проехал каждый велосипедист до встречи?

Ответ: 7 км и 10,5 км.



ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Отрицательными называются числа, меньшие нуля; они записываются со знаком «минус».

Например, числа -1; -2; $-0{,}27$; $-\frac{1}{2}$; -100; ... отрицательные (читают их так: минус один; минус два; минус нуль целых двадцать семь сотых; минус одна вторая; минус сто и т. д.)

Положительные числа (большие нуля), как правило, записывают без знака, хотя перед ними можно ставить знак «плюс».

Например, числа $+3$; $+\frac{1}{2}$; $+0{,}3$; $+4$; ... можно записать так:

$$3; \quad \frac{1}{2}; \quad 0{,}3; \quad 4; \ ...$$

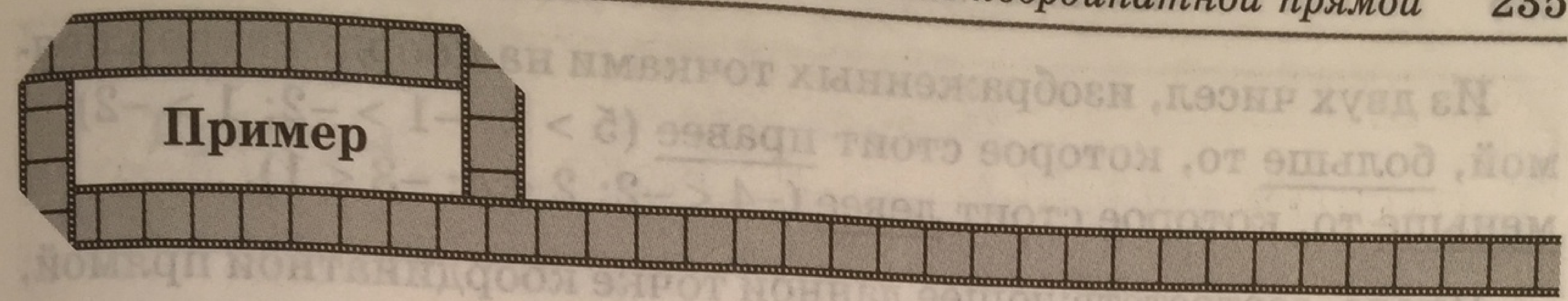
Число 0 (нуль) не является ни положительным, ни отрицательным.

Натуральные числа, целые отрицательные числа и нуль называются *целыми числами*, их множество обозначают буквой Z.

Например, числа -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... целые

Целые и дробные числа (положительные, отрицательные и нуль) называют *рациональными числами*, их множество обозначают буквой Q.

Например, числа -4; $-0{,}17$; 0; $\frac{2}{3}$; 2,5; 1,(3); 10, ... — рациональные



Из чисел -1; $1\frac{1}{3}$; $-5{,}1$; $4{,}5$; $-\frac{1}{2}$; 0; 15; $-8\frac{1}{7}$ выпишите числа: а) целые; б) положительные; в) отрицательные.

Ответ: а) -1; 0; 15; б) $1\frac{1}{3}$; $4{,}5$; 15; в) -1; $-5{,}1$; $-\frac{1}{2}$; $-8\frac{1}{7}$.

Изображение рациональных чисел на координатной прямой

Прямая, на которой выбраны начало отсчета (точка 0), отрезок, принятый за единицу, и положительное направление, называется *координатной прямой*.

Числа изображаются на координатной прямой точками, расположенными слева и справа от нуля. Если точка находится **справа** от нуля, то она изображает **положительное число**; если точка **слева** от нуля, то она изображает **отрицательное число.** Число 0 (нуль) не имеет знака.

$-5{,}1$ $-3{,}8$ $-2{,}5$ $-\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$ $1{,}5$ $2{,}5$ $3{,}7$

-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 x

Каждому рациональному **числу** на координатной прямой соответствует только **одна точка.**

Все **положительные** числа **больше отрицательных** чисел и числа 0.

Из двух чисел, изображенных точками на координатной прямой, больше то, которое стоит правее ($5 > 1$; $-1 > -2$; $1 > -2$), и меньше то, которое стоит левее ($-4 < -2$; $2 < 4$; $-3 < 1$).

Число, соответствующее данной точке координатной прямой, называется *координатой точки*.

Координата (число) определяет положение точки на прямой: число 3 — точка справа от 0; число −2 — точка слева от 0.

Числа −2 и 2; $-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$; *a* и −*a* называют *противоположными*.

−2,5 2,5

−3 −2 −1 0 1 2 3 *x*

Противоположные числа изображаются на координатной прямой точками, симметричными относительно точки 0.

Число 0 противоположно самому себе.

Проверь себя!

Какое из чисел на координатной прямой стоит правее:

а) −17 или −12; б) 0 или 1; в) −0,1 или −0,01?

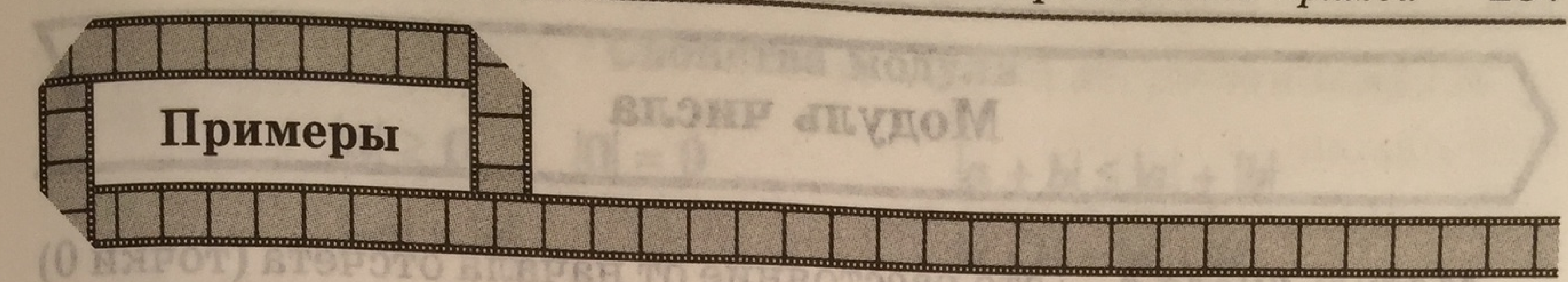
(Ответ запишите неравенством.)

Ответ: а) $-17 < -12$; б) $0 < 1$; в) $-0{,}1 < -0{,}01$.

Замечание. $(-a)$ есть число, противоположное числу *a*; это может быть число положительное, отрицательное и 0 в зависимости от значения самого числа *a*.

Например: если $a = 5$, то $-a = -5$; если $a = -3$, то $-a = 3$;
если $a = 0$, то $-a = 0$

−8 — число, противоположное числу 8. Записывают это так: $-8 = -(+8)$; числу −3 противоположно число $-(-3)$, т. е. число 3, пишут: $-(-3) = 3$



1. Прочитайте равенство: а) $-(-2) = 2$; б) $-(+3,5) = -3,5$; в) $4\frac{2}{3} = -\left(-4\frac{2}{3}\right)$. Сделайте вывод о знаке числа, противоположного данному.

Решение.

1) Число, противоположное числу (-2), равно $+2$

2) Число, противоположное числу $+3,5$, равно $(-3,5)$

3) Число, противоположное числу $4\frac{2}{3}$, равно $\left(-4\frac{2}{3}\right)$

2. Решите уравнение: а) $-x = -3,2$; б) $-(-2,8) = x$.

Решение.

а) $-x = -3,2$, $x = 3,2$ | $-(-x) = x$

б) $-(-2,8) = x$, $x = 2,8$ | $-(-3,2) = 3,2$

Ответ: а) 3,2; б) 2,8.

Проверь себя!

1. Изобразите точками координатной прямой данное число и число, ему противоположное: а) 4; б) $-2\frac{1}{3}$; в) 1,5.

Ответ: а) -4; б) $2\frac{1}{3}$; в) $-1,5$.

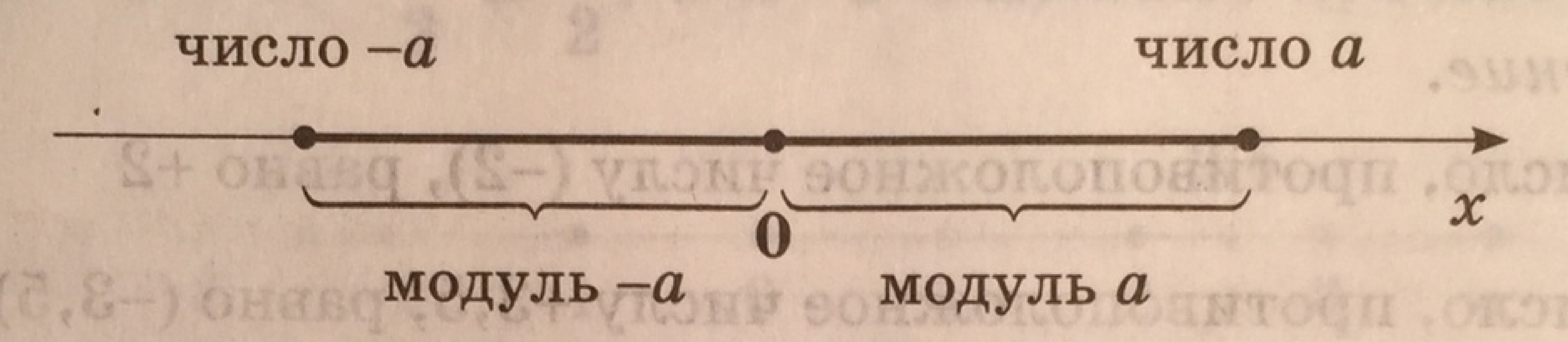
2. Решите уравнение: а) $-2,3 = x$; б) $-x = -(-5)$.

Ответ: а) $-2,3$; б) -5.

Модуль числа

Модуль числа a — это расстояние от начала отсчета (точки 0) до точки, изображающей число a на координатной прямой.

Так как модуль числа — это длина отрезка числовой оси, то модуль числа больше или равен нулю. Обозначается модуль числа a так: $|a|$.



Если $a \geq 0$, то $|a| = a$, $|0| = 0$.

Например: $|5| = 5$, $\left|3\frac{1}{2}\right| = 3\frac{1}{2}$

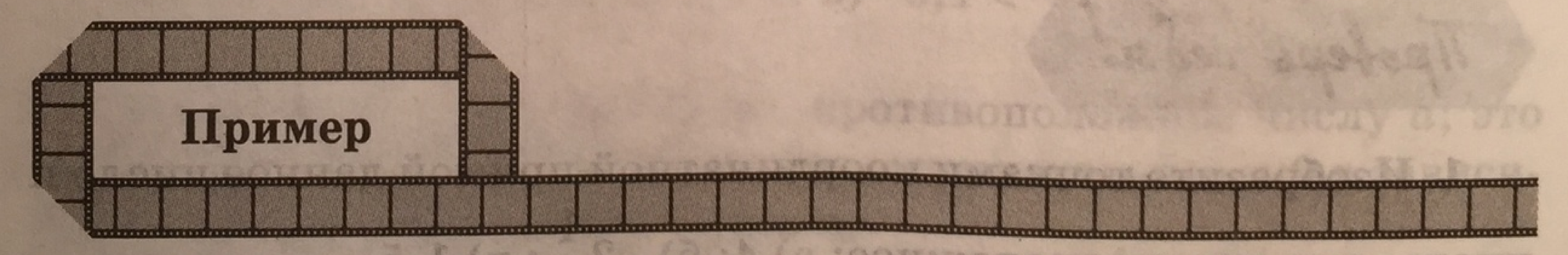
Если $a < 0$, то $|a| = -a$ (так как $-a > 0$, если $a < 0$).

Например: $|-3| = -(-3) = 3$

Можно записать определение модуля числа a так:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0 \\ -a, \text{ если } a < 0 \end{cases}$$

Замечание. Модуль числа a всегда положительное число или 0.



Решите уравнение $|x| = 30$.

Решение.

$x_1 = -30$; $x_2 = 30$, так как $|-30| = -(-30) = 30$ и $|30| = 30$

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0 \\ -a, \text{ если } a < 0 \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = -30$; $x_2 = 30$.

Свойства модуля

$|a| \geq 0$ $\quad |0| = 0$

$|-a| = |a|$

$|a - b| = |b - a|$

$|a^n| = |a|^n$

$|a + b| \leq |a| + |b|$

$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$

Примеры

1. Найдите значение выражения:

а) $|-40{,}13|$ б) $|3| + |10|$ в) $|15| - |-5| + |-10|$ г) $|-2| \cdot |-4|$

д) $\left|\frac{2}{3}\right| \cdot \left|-\frac{3}{2}\right|$ е) $|-0{,}015| : |-0{,}03|$

Решение.

а) $|-40{,}13| = 40{,}13$

б) $|3| + |10| = 3 + 10 = 13$

в) $|15| - |-5| + |-10| = 15 - 5 + 10 = 20$

г) $|-2| \cdot |-4| = 2 \cdot 4 = 8$

д) $\left|\frac{2}{3}\right| \cdot \left|-\frac{3}{2}\right| = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$

е) $|-0{,}015| : |-0{,}03| = 0{,}015 : 0{,}03 =$
$= 1{,}5 : 3 = 0{,}5$

$|a| = -a$, если $a < 0$
$|a| = a$, если $a \geq 0$

$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$

, (→) на 2 знака

2. Найдите значение выражения $|x| - |y|$, если $x = -12$, $y = 2$.

Решение.

$|-12| - |2| = 12 - 2 = 10$

$|a| = -a$, если $a < 0$
$|a| = a$, если $a \geq 0$

3. Сравните числа $|3 - 5|$ и $|5 - 3|$.

Решение.

$|3 - 5| = |5 - 3|$, так как
$|3 - 5| = |-2| = 2$; $|5 - 3| = |2| = 2$

| $|a - b| = |b - a|$

4. Вычислите $|(-3)^3|$.

Решение.

$|(-3)^3| = |-3|^3 = 3^3 = 27$

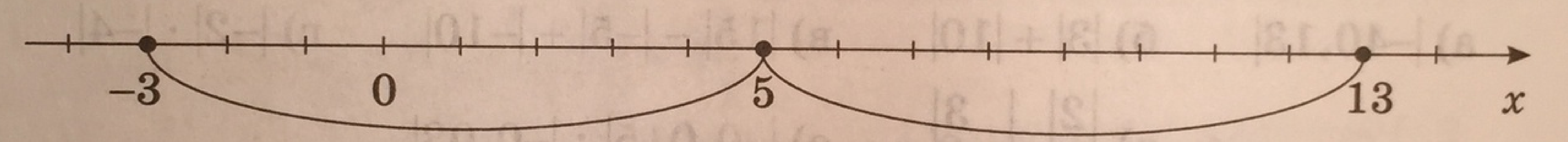
| $|a^n| = |a|^n$

5. Решите уравнение $|x - 5| = 8$.

Решение.

$x - 5 = 8$, если $x - 5 \geq 0$
$x - 5 = -8$, если $x - 5 < 0$

| $|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0 \\ -a, \text{ если } a < 0 \end{cases}$



$x = 8 + 5$, $x = 13$;
$x = -8 + 5$, $x = -3$

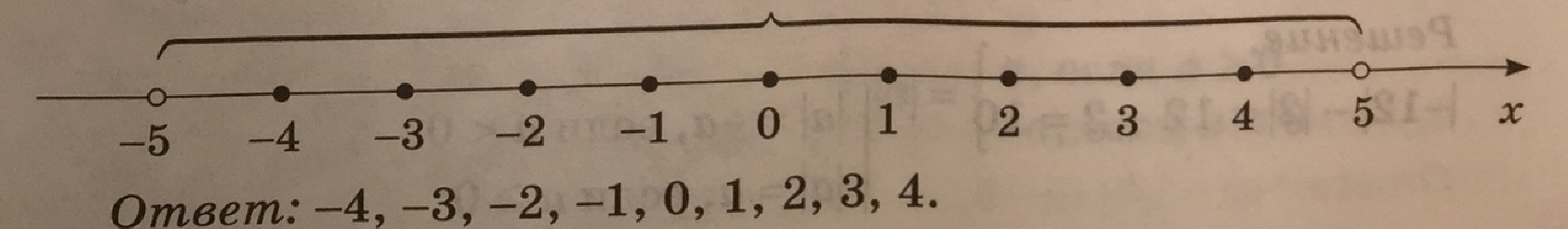
| Расстояние от 5 равно 8 единицам (влево и вправо)

Ответ: 13, –3.

6. Найдите целые решения неравенства $|x| < 5$ с помощью координатной прямой.

Решение.

Отложите на координатной прямой Ox слева и справа от нуля 5 единичных отрезков; так как модуль x меньше, чем 5, то все целые числа от –5 до 5, не включая их (неравенство строгое), есть решение данного неравенства $|x| < 5$. Это числа –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4.



Ответ: –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4.

Проверь себя!

1. Вычислите: а) $|-2 \cdot 3|$; б) $|5 - 10|$; в) $|-6| : |2|$.

Ответ: а) 6; б) 5; в) 3.

2. Решите уравнение $|x - 2| = 3$.

Ответ: 5, –1.

3. Решите неравенство $|x| \leq 3$ и запишите только целые решения.

Ответ: –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3.

Правила сравнения рациональных чисел

1. Из двух положительных чисел больше то, модуль которого больше: если $a > 0$, $b > 0$ и $|a| > |b|$, то $a > b$.

Например: $10 > 9$, так как $|10| > |9|$

Замечание. Большее из двух положительных чисел изображается точкой, расположенной на координатной прямой правее и дальше от начала отсчета (точки 0).

2. Из двух отрицательных чисел больше то, модуль которого меньше: если $a < 0$ и $b < 0$, $|a| > |b|$, то $a < b$.

Например: $-3 > -7$, так как $|-3| < |-7|$

$|-3| = 3$, $|-7| = 7$

Замечание. Большее из двух отрицательных чисел изображается точкой, расположенной на координатной прямой правее и ближе к началу отсчета (точке 0).

3. Из двух чисел разного знака положительное число всегда больше отрицательного.

Например: $0{,}2 > -10$

4. Любое положительное число больше нуля, нуль больше любого отрицательного числа.

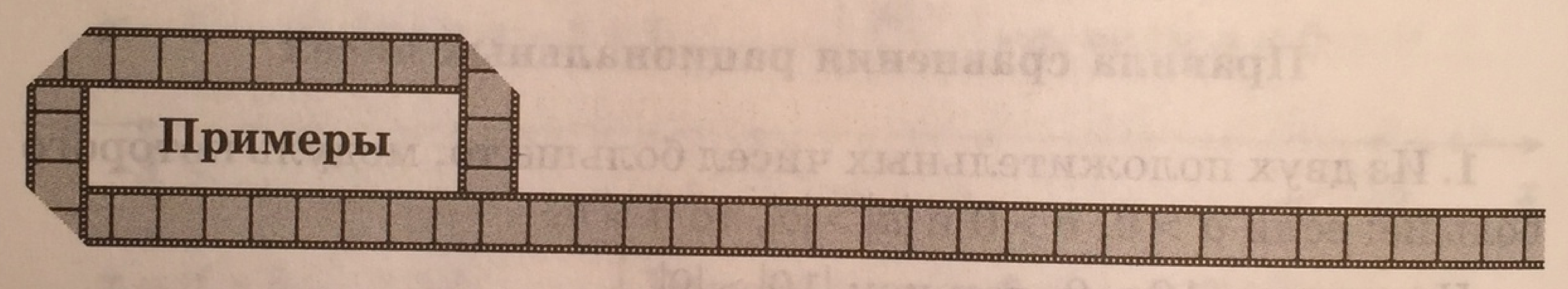
Например: $1{,}3 > 0$; $0 > -2$

Алгоритм 86 Сравнение (двух) рациональных чисел

① Определите знаки чисел и выберите одно из правил 1—3.

② Если применяете правило 1 или 2, то найдите модули чисел и сравните их.

③ Сделайте вывод, применив соответствующее правило.



Сравните числа: а) $-1{,}5$ и -2; б) $3\frac{1}{2}$ и $2\frac{2}{3}$; в) $-1{,}01$ и 0.

Решение.

а) $-1{,}5 > -2$	**Правило 2:** $\lvert -1{,}5\rvert < \lvert -2\rvert$, $1{,}5 < 2$
б) $3\frac{1}{2} > 2\frac{2}{3}$	**Правило 1:** $\left\lvert 3\frac{1}{2}\right\rvert > \left\lvert 2\frac{2}{3}\right\rvert$, $3 > 2$
в) $-1{,}01 < 0$	**Правило 3:** $0 > a$, если $a < 0$

Проверь себя!

Сравните числа: а) -15 и $-14{,}9$; б) 8 и 8,01; в) -10 и 9; г) $-1{,}2$ и 0; д) 2 и 0; е) $-0{,}03$ и $-0{,}02$

Ответ: а) $-15 < -14{,}9$; б) $8 < 8{,}01$; в) $-10 < 9$; г) $-1{,}2 < 0$; д) $2 > 0$; е) $-0{,}03 < -0{,}02$.

Действия над рациональными числами

Законы сложения и умножения для рациональных чисел такие же, как и для натуральных.

$$a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a$$

(переместительный закон)

$$a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

(сочетательный закон)

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \quad (a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$$

(распределительный закон)

Действия с единицей

$a \cdot 1 = a$ $\quad -a \cdot 1 = -a$ $\quad a : 1 = a$ $\quad -a : 1 = -a$

$1 : (-a) = -\frac{1}{a}$ $\quad 1 : \frac{1}{a} = a$ $\quad (-a) \cdot (-1) = a$

Действия с нулем

$a + 0 = a$ $\quad -a + 0 = -a$ $\quad -a + a = 0$

$a - a = 0$ $\quad 0 + 0 = 0$ $\quad 0 - a = -a$ $\quad a - 0 = a$

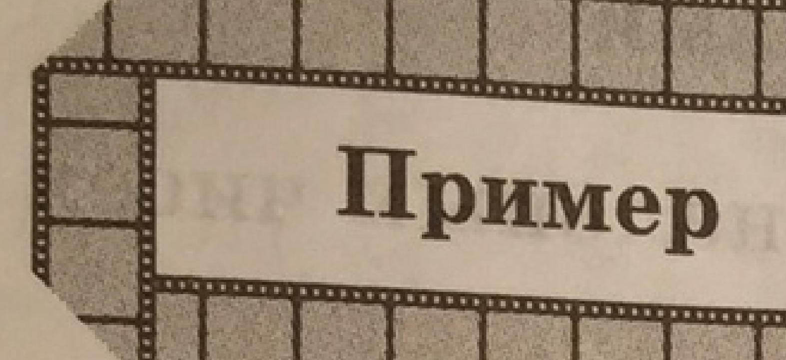
$0 \cdot a = 0$ $\quad -a \cdot 0 = 0$ $\quad 0 : a = 0$ $\quad 0 : (-a) = 0$

Делить на нуль нельзя!

Алгоритм 87 Сложение двух чисел одного знака

① Сложите модули слагаемых.

② Перед суммой модулей поставьте знак слагаемых.



Пример

Сложите числа: а) $10 + 5$; б) $-8 + (-10)$; в) $-9\frac{4}{5} + (-1{,}8)$.

Решение.

а) $10 + 5 = 15$	$(+) + (+) = (+)$
б) $-8 + (-10) = -18$	$(-) + (-) = (-)$ $\lvert -8 \rvert + \lvert -10 \rvert = 10 + 8 = 18$
в) $-9\frac{4}{5} + (-1{,}8) = -11{,}6$	$\left\lvert -9\frac{4}{5} \right\rvert + \lvert -1{,}8 \rvert = 9\frac{4}{5} + 1{,}8 =$ $= 9{,}8 + 1{,}8 = 11{,}6$

Проверь себя!

Найдите сумму чисел:

а) $-12{,}15 + (-8{,}85)$ б) $7{,}3 + 10$ в) $-1\frac{1}{3} + \left(-2\frac{1}{4}\right)$

Ответ: а) -21; б) $17{,}3$; в) $-3\frac{7}{12}$.

Алгоритм 88 Сложение двух чисел разного знака

1. Определите знак суммы и запишите его в ответ; знак совпадает со знаком того числа, модуль которого больше, т. е.
   $(-) + (+) = (-)$, если модуль *отрицательного* числа больше;
   $(+) + (-) = (+)$, если модуль *положительного* числа больше.
2. Вычтите из большего модуля меньший модуль данных слагаемых и запишите число в ответ.
3. Запишите ответ (знак результата из п. 1, а модуль из п. 2).
4. Если модули чисел равны, то их сумма равна нулю ($-a + a = 0$).

Примеры

Найдите сумму чисел (1—4).

1. $15 + (-7) = +(15 - 7) = 8$ — $|+15| > |-7|$, (+)
2. $(-19) + 9 = -(19 - 9) = -10$ — $|-19| > |9|$, (–)
3. $-6{,}3 + 6{,}3 = 0$ — $-a + a = 0$
4. $6{,}3 + \left(-4\frac{13}{30}\right) = +\left(6\frac{3}{10} - 4\frac{13}{30}\right) =$ — $|+6{,}3| > \left|-4\frac{13}{30}\right|$

$$= 6\frac{9}{30} - 4\frac{13}{30} = 5\frac{39}{30} - 4\frac{13}{30} = 1\frac{26}{30} = 1\frac{13}{15}$$

Проверь себя!

Сложите числа:

а) $10 + (-12)$ б) $(-7{,}1) + 8$ в) $-1 + 0{,}8$

г) $\left(-15\frac{5}{16}\right) + 7\frac{3}{8}$ д) $(-4) + 4$

Ответ: а) –2; б) 0,9; в) –0,2; г) $-7\frac{15}{16}$; д) 0.

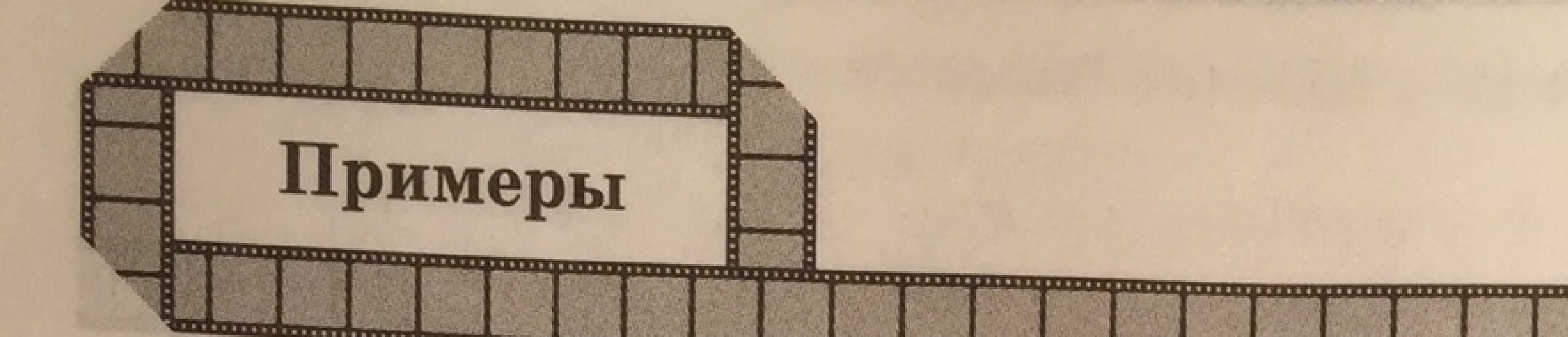
Алгоритм 89 Вычитание рациональных чисел

① Найдите число, противоположное вычитаемому.

② Прибавьте полученное число к уменьшаемому.

Замечание. Вычитание можно заменить сложением:

$$a - b = a + (-b)$$

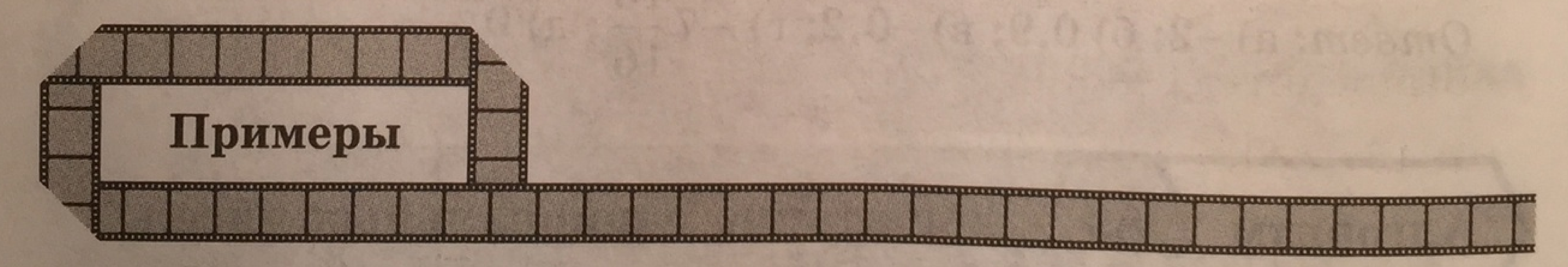


Вычислите (1—5).

1. $12 - (-4) = 12 + (+4) = 16$
2. $15 - (+3) = 15 + (-3) = 12$ | $|15| > |3|, (+)$
3. $(-6{,}9) - (-6{,}9) = -6{,}9 + 6{,}9 = 0$ | $-a + a = 0$
4. $11\frac{2}{3} - \left(-8\frac{4}{5}\right) = 11\frac{2}{3}^{(5} + 8\frac{4}{5}^{(3} = 19\frac{10+12}{15} = 19\frac{22}{15} = 20\frac{7}{15}$
5. $(-92{,}06) - 12{,}06 = (-92{,}06) + (-12{,}06) =$
$= -104{,}12$ | $(-) + (-) = (-)$

Полезный совет

Удобно сложить все числа со знаком «–», числа со знаком «+», а затем сложить числа с разными знаками.



1. Запишите выражение $-14{,}2 - 36{,}5 + 42{,}5$ в виде суммы чисел и вычислите его значение.

Решение.

$-14{,}2 - 36{,}5 + 42{,}5 = -14{,}2 + (-36{,}5) + 42{,}5 = -(14{,}2 + 36{,}5) +$
$+ 42{,}5 = -50{,}7 + 42{,}5 = -8{,}2$

Ответ: $-8{,}2$.

2. Вычислите: −13 + 8 − 20 − 6 + 2.

Решение.

$-13 + 8 - 20 - 6 + 2 = -(13 + 20 + 6) + (8 + 2) = -39 + 10 = -29$

$(-) + (-) = (-)$

$(-) + (+) = (-)$

$|-39| > |10|$

Ответ: −29.

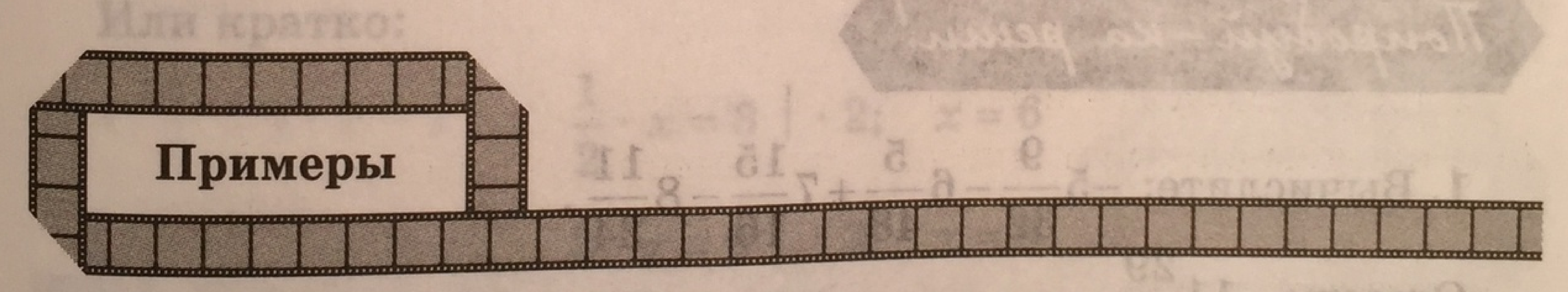
Проверь себя!

Запишите выражение −8,3 + 9 − 11,7 − 10,3 + 10,3 в виде суммы чисел и вычислите его значение.

Ответ: −11.

Алгебраическая сумма

Сумму нескольких положительных, отрицательных чисел и нуля называют *алгебраической суммой*.



Вычислите (1—3).

1. $45 - (-32) = 45 + 32 = 77$ $\quad -(-32) = 32$

2. $(-7) + \left(-8\frac{3}{4}\right) + \left(-4\frac{1}{2}\right) - (-7{,}2) =$ $\quad -(-7{,}2) = 7{,}2$

$= -7 - 8\frac{3}{4} - 4\frac{1}{2} + 7{,}2 =$

$= -\left(7 + 8\frac{3}{4} + 4\frac{2}{4}\right) + 7{,}2 =$ $\quad (-) + (-) = (-)$

$= -20\frac{1}{4} + 7{,}2 = -20{,}25 + 7{,}2 = -13{,}05$ $\quad 19\frac{5}{4} = 20\frac{1}{4} = 20{,}25$

3. $-14{,}2 - 36{,}5 + 42{,}5 = -14{,}2 + (42{,}5 - 36{,}5) = -14{,}2 + 6 = -8{,}2$

$a + b + c = a + (b + c)$
$(-) + (+) = (-)$
$|-14{,}2| > |6|$

Замечание. Сумма двух противоположных чисел равна нулю, поэтому такие числа при записи сложения зачеркивают.

Например:

$$2{,}2 + (-3{,}5) - (-3{,}5) + (-3) = 2{,}2 - \cancel{3{,}5} + \cancel{3{,}5} - 3 = -0{,}8$$

Попробуй не реши!

Сложите числа:

а) $-5{,}8 - 7\frac{1}{2} - 3{,}14 + 0{,}8$ б) $-2\frac{2}{3} + 0{,}9 - 7{,}3 + 8{,}2$

Ответ: а) $-15{,}64$; б) $-\frac{13}{15}$.

Попробуй-ка реши!

1. Вычислите: $-5\frac{9}{32} - 6\frac{5}{48} + 7\frac{15}{16} - 8\frac{11}{24}$.

Ответ: $-11\frac{29}{32}$.

2. Вычислите, применяя законы сложения:

$$(7{,}2 + 8{,}4 - 22{,}4) - (15{,}56 - 22{,}4)$$

Ответ: 0,04.

Свойства равенств, используемые при решении уравнений

1. Если к обеим частям верного равенства прибавить одно и то же число, то получим верное равенство.

Например, если $a + b = b + a$, то

$$a + b + c = b + a + c \text{ — верное равенство}$$

Из свойства 1 следует, что любое слагаемое можно перенести из одной части равенства в другую, изменив его знак на противоположный, получим верное равенство.

Например, если $x + 2 = 5$, то $x = 5 - 2$, $x = 3$,
так как если $a + b = c$, то $a = c - b$

2. Если обе части верного равенства разделить или умножить на одно и то же число, не равное 0, то получим верное равенство.

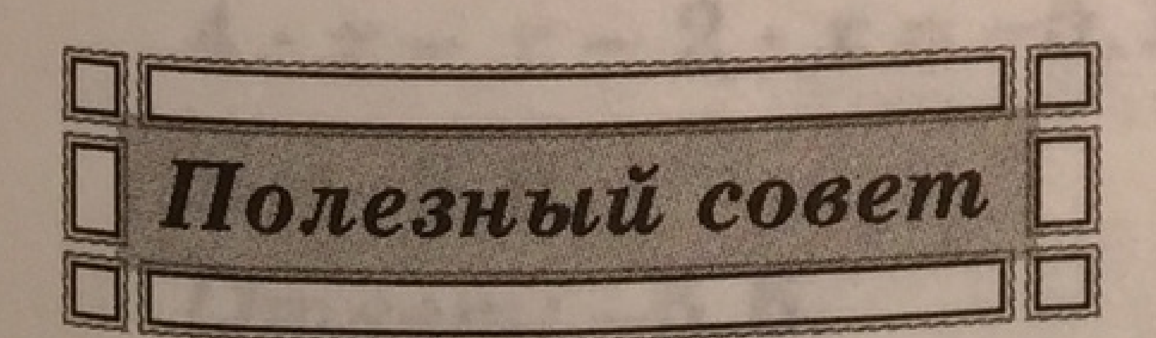
Например, если обе части равенства $\frac{1}{2} \cdot x = 3$ умножим на 2, то запишем это так: $\frac{1}{2} \cdot x = 3 \;\big|\; \cdot 2$; получим $x = 6$

Если обе части равенства $3 \cdot x = 9$ разделим на 3, то запишем это так: $3 \cdot x = 9 \;\big|\; : 3$; получим $x = 3$

Или кратко:

$$\frac{1}{2} \cdot x = 3 \;\big|\; \cdot 2; \quad x = 6$$

$$3 \cdot x = 9 \;\big|\; : 3; \quad x = 3$$



При решении уравнений в левой части надо получить $1x$ или просто x, поэтому сначала посмотрите, какое действие удобно применить (умножение или деление). Если множитель при x — обыкновенная дробь, то умножьте обе части уравнения на обратную ей дробь; если множитель при x — целое число, то разделите на него.

Алгоритм 90 Решение уравнений

① Если уравнение не содержит скобок, то перенесите все выражения с неизвестным в одну часть уравнения, а известные числа в другую, изменив знаки всех выражений и чисел на противоположные.

② Если уравнение содержит скобки, то раскройте их (используя распределительный закон: $(a \pm b) \cdot c = ac \pm b \cdot c$) и выполните операцию п. 1.

③ Сложите числа по правилам вычисления алгебраической суммы.

④ Найдите сумму слагаемых, содержащих x (используя распределительный закон справа налево: $ax + bx = x \cdot (a + b)$), получите в результате уравнение вида $a \cdot x = b$.

⑤ Решите уравнение $a \cdot x = b$, разделив обе части уравнения на a; получите $x = b : a$ (учтите полезный совет).

⑥ Запишите ответ.

Примеры

Решите уравнение (1—4).

1. $1{,}2 \cdot x + 6 = 13{,}2$

Решение.

$1{,}2 \cdot x + 6 = 13{,}2$	-6
$1{,}2 \cdot x = 13{,}2 - 6$	
$1{,}2 \cdot x = 7{,}2$	$:1{,}2$
$x = 7{,}2 : 1{,}2$	$7{,}2 : 1{,}2 = 72 : 12 = 6$
$x = 6$	

Ответ: 6.

2. $-6{,}78 - 3{,}12 = 12 - 25{,}9 + y$

Решение.

$-6{,}78 - 3{,}12 = 12 - 25{,}9 + y$	$-6{,}78 - 3{,}12 = -(6{,}78 + 3{,}12) =$ $= -9{,}9$
$-9{,}9 = -13{,}9 + y$	$12 - 25{,}9 = -(25{,}9 - 12) = -13{,}9$
$-9{,}9 + 13{,}9 + = y$	Если $a = c$, то $c = a$
$y = 4$	

Ответ: 4.

3. $5 \cdot (2 + 1{,}5x) - 0{,}5x = 24$

Решение.

$5 \cdot (2 + 1{,}5x) - 0{,}5 \cdot x = 24$	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
$5 \cdot 2 + 5 \cdot 1{,}5 \cdot x - 0{,}5 \cdot x = 24$	
$10 + (7{,}5 \cdot x - 0{,}5 \cdot x) = 24$	-10
$7{,}5 \cdot x - 0{,}5 \cdot x = 24 - 10$	$a \cdot x - b \cdot x = x \cdot (a - b)$

$7 \cdot x = 14 \mid : 7$

$x = 2$

Ответ: 2.

4. $\frac{1}{2} + 4 \cdot x - x = 2 \cdot x - 5{,}1$

Решение.

$\frac{1}{2} + 4 \cdot x - x = 2 \cdot x - 5{,}1$	$-5{,}1 - \frac{1}{2} = -5{,}1 - 0{,}5 = -5{,}6$
$4 \cdot x - x - 2 \cdot x = -5{,}1 - \frac{1}{2}$	$(-) + (-) = (-)$
$x = -5{,}6$	$4x - x - 2x = (4 - 1 - 2)x = x$

Ответ: $-5{,}6$.

Проверь себя!

Решите уравнение: а) $2{,}1 \cdot x - 3{,}7 + 1{,}1 = -x + 6{,}7$

б) $6 \cdot x - 3 \cdot x + 2{,}5 = x + 4{,}9$

Ответ: а) 3; б) 1,2.

Правила знаков при выполнении действий умножения и деления над рациональными числами

$(+) \cdot (+) = (+)$

$(-) \cdot (-) = (+)$

$(+) \cdot (-) = (-)$

$(-) \cdot (+) = (-)$

$(+) : (+) = (+)$

$(-) : (-) = (+)$

$(+) : (-) = (-)$

$(-) : (+) = (-)$

Алгоритм 91 Умножение двух чисел с одинаковыми знаками

① Найдите модули данных чисел и перемножьте их.

② Произведение двух чисел с одинаковыми знаками — число положительное, т. е. полученное в п. 1 положительное число запишите в ответе.

Например: $(-4) \cdot (-10) = 4 \cdot 10 = 40$

$(-2{,}5) \cdot (-4) = 2{,}5 \cdot 4 = 10$

$5 \cdot 3 = 15$

Алгоритм 92 Умножение двух чисел с разными знаками

① Произведение двух чисел с разными знаками — число отрицательное, поставьте в ответ знак «–».

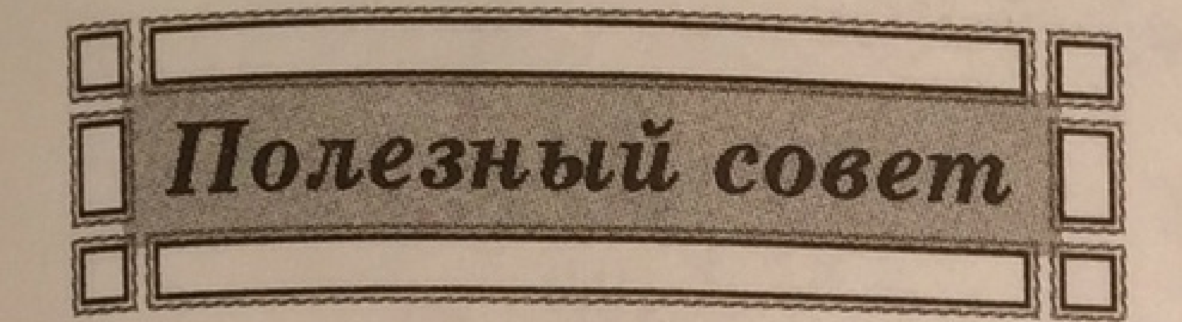
$(+) \cdot (-) = (-)$

$(-) \cdot (+) = (-)$

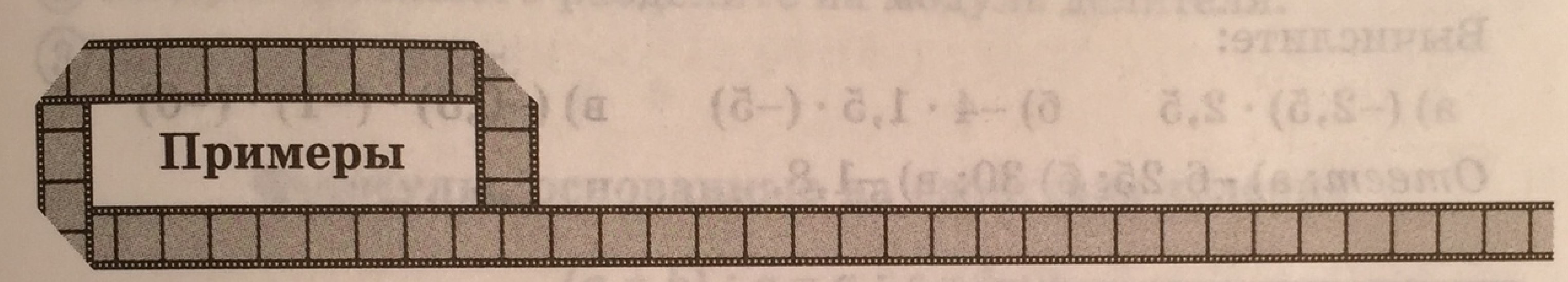
② Перемножьте модули чисел и перед произведением модулей поставьте знак «–».

Например: $(-2{,}1) \cdot 3 = -2{,}1 \cdot 3 = -6{,}3$ | $|-2{,}1| = 2{,}1$; $|3| = 3$

Замечание. Произведение нескольких множителей разного знака положительно, если количество отрицательных множителей четное; отрицательно, если количество отрицательных множителей нечетное.



При вычислении произведения нескольких чисел сначала определите его знак, а затем находите модуль.



Вычислите (1—7).

1. $-8 \cdot 3 = -24$ | $(-) \cdot (+) = (-)$

2. $(-2) \cdot (-5) = 10$ | $(-) \cdot (-) = (+)$

3. $5 \cdot \left(-1\frac{1}{2}\right) = -7{,}5$ | $5 \cdot 1{,}5 = 7{,}5$; $(+) \cdot (-) = (-)$

4. $(-3) \cdot (-2) \cdot 4 \cdot (-1) = -24$ | 3 минуса

5. $(-2{,}7) \cdot ((-12{,}3 - (-0{,}8) - (-12{,}3)) =$
$= -(2{,}7) \cdot (-12{,}3 + 0{,}8 + 12{,}3) = -2{,}7 \cdot 0{,}8 =$
$= -2{,}16$ | $-(-0{,}8) = +0{,}8$; $-a + a = 0$; $(-) \cdot (+) = (-)$

6. $(-1)^3 \cdot (-1)^2 \cdot (-2)^4 \cdot (-3)^3 = (-1) \cdot 1 \cdot 16 \cdot (-27) = 432$

Замечание. Четная степень отрицательного числа есть число положительное, а нечетная степень отрицательного числа есть число отрицательное.

7. Решите уравнение $0{,}2 \cdot (x + 1{,}5) - 0{,}5 = 5 - 0{,}3 \cdot x$.

Решение. | $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$0{,}2 \cdot (x + 1{,}5\ ) - 0{,}5 = 5 - 0{,}3 \cdot x$

$0{,}2 \cdot x + 1{,}5 \cdot 0{,}2 - 0{,}5 = 5 - 0{,}3 \cdot x$

$0{,}2 \cdot x + 0{,}3 \cdot x = 5 - 0{,}3 + 0{,}5$ | $a \cdot x + b \cdot x = x \cdot (a + b)$

$0{,}5 \cdot x = 5{,}2 \quad | \cdot 2$

$x = 10{,}4$ | $a \cdot x = b \quad | : a$

Ответ: 10,4.

Проверь себя!

Вычислите:

а) $(-2{,}5) \cdot 2{,}5$ б) $-4 \cdot 1{,}5 \cdot (-5)$ в) $(-0{,}3) \cdot (-1) \cdot (-6)$

Ответ: а) –6,25; б) 30; в) –1,8.

Попробуй не реши!

Решите уравнение:

а) $0{,}5 \cdot (x + 0{,}5) - 0{,}25 = 0{,}4 \cdot x$ б) $0{,}4 \cdot (5 \cdot x - 4) = -0{,}9$

Ответ: а) 0; б) 0,35.

Попробуй-ка реши!

Решите уравнение:

а) $\left|\frac{5}{12} - x\right| = \frac{7}{18}$

б) $x + \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{1}{3} \cdot \left(x + \frac{1}{4}\right)\right) = \frac{1}{8}$

в) $(-12) : (-|x|) + (-6{,}06) = -0{,}06$

Ответ: а) $\frac{1}{36}$; $\frac{29}{36}$; б) $\frac{1}{20}$; в) –2; 2.

Алгоритм 93 Деление рациональных чисел

① Определите знак частного по правилу знаков:

$$(+) : (+) = (+)$$
$$(-) : (-) = (+)$$
$$(+) : (-) = (-)$$
$$(-) : (+) = (-)$$

② Модуль делимого разделите на модуль делителя.

③ Запишите ответ.

Формулы, основанные на свойствах деления

$$(a \pm b) : c = a : c \pm b : c$$
$$(a : b) : c = a : (b \cdot c)$$
$$a : (b \cdot c) = (a : b) : c = (a : c) : b$$
$$(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b = a \cdot (b : c)$$
$$(a : b) \cdot c = (a \cdot c) : b$$
$$a : 1 = a \qquad a : a = 1 \qquad 0 : a = 0$$
$$a : b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}, \quad b \neq 0$$

На нуль делить нельзя!

Примеры

Вычислите (1—5).

1. $(-14) : (-2) = +|-14| : |-2| = 7$
2. $0{,}75 : (-0{,}15) = -75 : 15 = -5$
3. $-1\frac{1}{2} : (-5) = 1{,}5 : 5 = 0{,}3$

$(-) : (-) = (+)$

$(+) : (-) = (-)$

$(-) : (-) = (+)$

4. $(-1{,}9 \cdot 4) : 4 = -1{,}9 \cdot (4 : 4) = -1{,}9$

5. $\left(-0{,}125 : 4\frac{1}{3}\right) \cdot 8 = -\frac{1}{8} \cdot 8 : 4\frac{1}{3} =$

$= -1 : \frac{13}{3} = -\frac{3}{13}$

$(a \cdot b) : c = a \cdot (b : c)$

$(a : b) \cdot c = (a \cdot c) : b$

$\frac{1}{a} \cdot a = 1,\ 1 : \frac{a}{b} = \frac{b}{a}$

Проверь себя!

Вычислите: а) $(-12{,}5) : (-5)$; б) $-1\frac{3}{4} : \frac{7}{8}$; в) $(-1{,}2 \cdot (-5)) : 10$; г) $50 : \left(\left(-8\frac{1}{2}\right) : \left(-4\frac{1}{4}\right)\right)$.

Ответ: а) 2,5; б) –2; в) 0,6; г) 25.

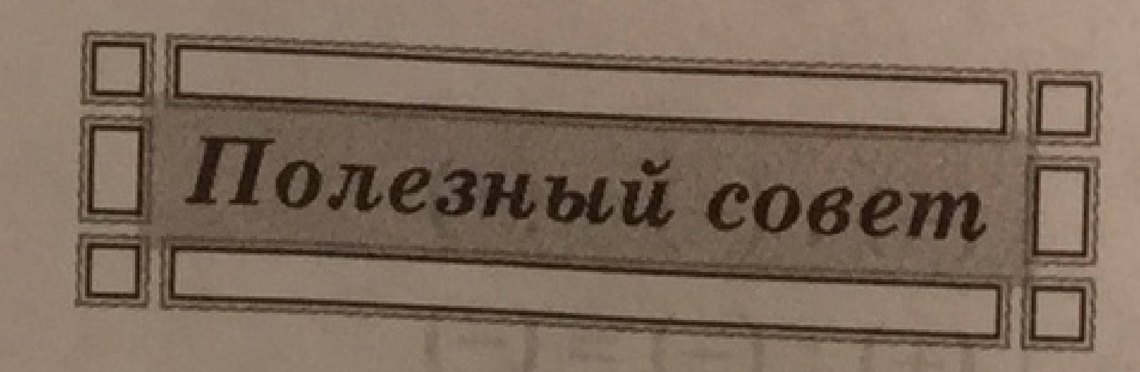
Алгоритм 94 Решение примеров на все действия с рациональными числами

① Определите порядок действий (если есть скобки, то сначала выполните действия в скобках).

② Выполните (если они есть) действия III ступени (возведение в степень).

③ Выполните действия II ступени (умножение и деление) по порядку.

④ Выполните действия I ступени (сложение и вычитание) по порядку.



Если есть возможность применить законы умножения и сложения, то примените их.

Примеры

Вычислите значение выражения (1—2).

1. $0{,}19 \cdot (-2{,}5) - 1{,}19 \cdot (-2{,}5) + 2 \cdot (-2{,}5) =$
$= (-2{,}5) \cdot (0{,}19 - 1{,}19 + 2) = -2{,}5 \cdot 1 = -2{,}5$

| $ab + ac + ad =$
| $= a(b + c + d)$
| $a \cdot 1 = a$

2. $$\frac{-0{,}2 \overset{4}{\cdot} \left(6{,}2 \overset{1}{:} 0{,}31 \overset{3}{-} \frac{5}{6} \overset{2}{\cdot} 0{,}9\right)}{-3 \overset{7}{+} \frac{4}{11} \overset{5}{\cdot} (-22) \overset{6}{:} (-0{,}1)}{}_{8} = -\frac{1}{20}$$

Решение.

1) $6{,}2 : 0{,}31 = 620 : 31 = 20$ | , (→) на 2 знака

2) $\frac{5}{6} \cdot 0{,}9 = \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10} = \frac{\cancel{5}^{1} \cdot \cancel{9}^{3}}{\cancel{6}_{2} \cdot \cancel{10}_{2}} = \frac{3}{4}$ | $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

3) $20 - \frac{3}{4} = 19\frac{1}{4}$

4) $-0{,}2 \cdot 19\frac{1}{4} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{77}{4} = -\frac{77}{20}$ | $0{,}2 = \frac{1}{5}$

5) $\frac{4}{11} \cdot (-22) = -\frac{4 \cdot 22}{11} = -8$ | $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$

6) $-8 : (-0{,}1) = 80 : 1 = 80$ | , (→) на 1 знак

7) $-3 + 80 = 77$

8) $-\frac{77}{20} : 77 = -\frac{77}{20 \cdot 77} = -\frac{1}{20}$ | $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$

Ответ: $-\frac{1}{20}$.

Проверь себя!

Вычислите:

$$0{,}364 : \frac{7}{25} + \frac{5}{16} : 0{,}125 + 2{,}5 \cdot 0{,}8$$

Ответ: 5,8.

Попробуй не реши!

1. Сравните числа:

а) –13,97 и –6,79 б) $|-4{,}7|$ и 3,5 в) –1,11 и $-|-3{,}24|$

Ответ: а) $-13{,}97 < -6{,}79$; б) $|-4{,}7| > 3{,}5$; в) $-1{,}11 > -|-3{,}24|$.

2. Вычислите:

$$\left(3\frac{4}{25} + 20{,}24\right) \cdot 2{,}15 + \left(5{,}1625 - 2\frac{3}{16}\right) \cdot \frac{2}{5}$$

Ответ: 51,5.

3. Решите уравнение $|x - 2| = 6$.

Ответ: 8; –4.

4. Решите уравнение

$$(2000 - 2000{,}024) \cdot (x + 0{,}75) = 0{,}048$$

Ответ: –2,75.

Попробуй-ка реши!

1. Решите уравнение $-8{,}5 \cdot (|x - 1| + (-2{,}5)) = 20{,}4$.

Ответ: 1,1; 0,9.

2. Вычислите:

$$(-1)^{2n} \cdot 3 + (-1)^{2n+1} \cdot 2 - (-1)^{6n} \cdot 5$$

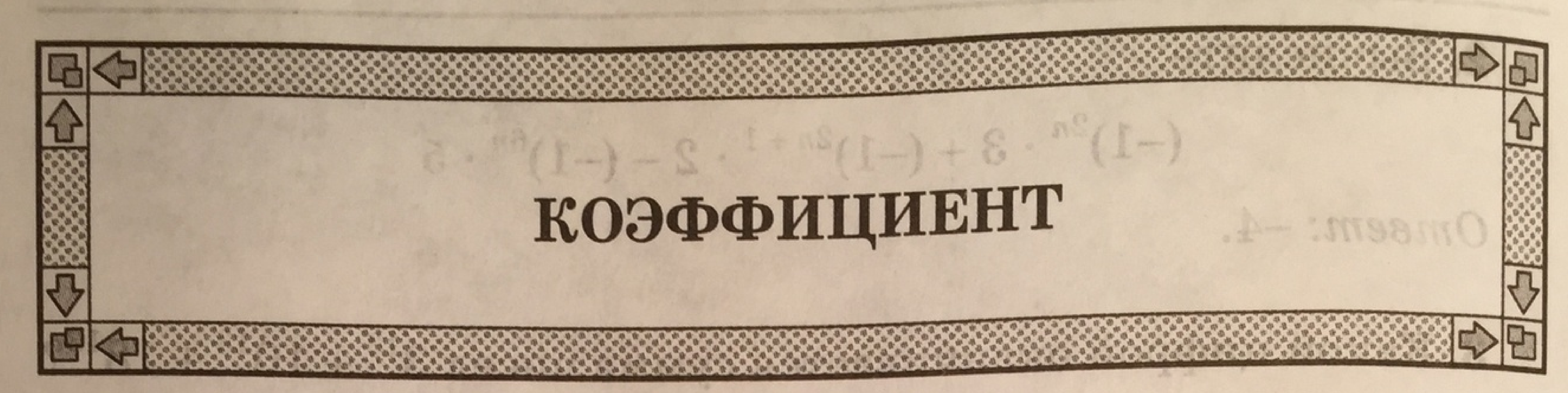
Ответ: –4.

3. Какой цифрой оканчивается сумма чисел $3^{13} + 10^{13} + 18^{13}$?

Ответ: 1.

4. Найдите значение выражения $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}}$

Ответ: $\dfrac{12}{29}$.



КОЭФФИЦИЕНТ

Числовой множитель, стоящий перед произведением буквенных множителей, называется *коэффициентом*.

Если числовых множителей в произведении несколько, то перемножьте их и полученное число (коэффициент) поставьте на первое место перед произведением букв.

Например, в произведении $5 \cdot a \cdot b \cdot 3c^2 = 15abc^2$ коэффициент равен 15, а в произведении $2ab$ коэффициент равен 2

Замечания

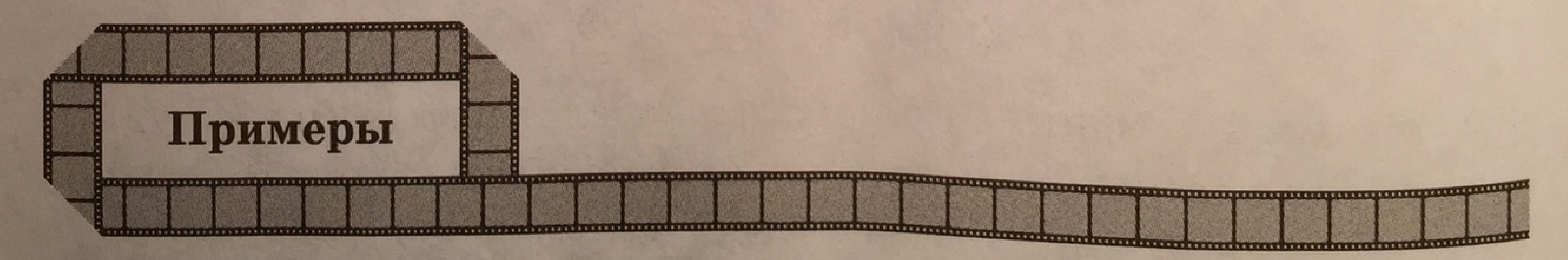
1. Знаки умножения между числами и буквами и между буквами не пишут, а минус ставят перед коэффициентом, *например*: $-2a + cd$.

2. Плюс перед первым коэффициентом суммы опускают, *например:* $3x + 2y$.

3. Коэффициент 1 обычно перед произведением не пишут.

$1 \cdot a = a$, коэффициент 1 не пишут перед буквой

$-1 \cdot a = -a$, коэффициент (–1) заменяют минусом перед буквой



Примеры

Упростите выражение и назовите его коэффициент:

а) $-3 \cdot (-8b) = 24b$, коэффициент 24

б) $-0{,}5k \cdot 4b \cdot 10 = -20kb$, коэффициент –20

в) $3\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{7}{2} \cdot \frac{2}{7} \cdot 2a = -2a$, коэффициент –2

г) $-a \cdot b = -ab$, коэффициент –1

Подобные слагаемые

Слагаемые алгебраической суммы, у которых одинаковые буквенные множители, называются *подобными слагаемыми.*

Например, у суммы $a + 2a - 5a$ подобные слагаемые, a, $2a$, $-5a$

В выражении $2xy - 5xy - 10xy$ подобные слагаемые, $2xy$, $-5xy$, $-10xy$

Подобные слагаемые можно сложить, что называется *приведением подобных слагаемых.*

Например: $2ab - 1{,}5ab = 0{,}5ab$

Алгоритм 95 Приведение подобных слагаемых

① Если слагаемые содержат два и более числовых множителя, то перемножьте их.

Например:

$$2 \cdot a \cdot 3 \cdot b + 5a \cdot 2b - 8ab = 6ab + 10ab - 8ab$$

② Подчеркните подобные слагаемые одинаково.

Например:

$$\underline{3xy} - \underline{\underline{ab}} + \underline{xy} + \underline{\underline{2ab}}$$

③ Сложите коэффициенты подобных слагаемых (не забудьте знаки коэффициентов) и полученный коэффициент умножьте на буквенные множители.

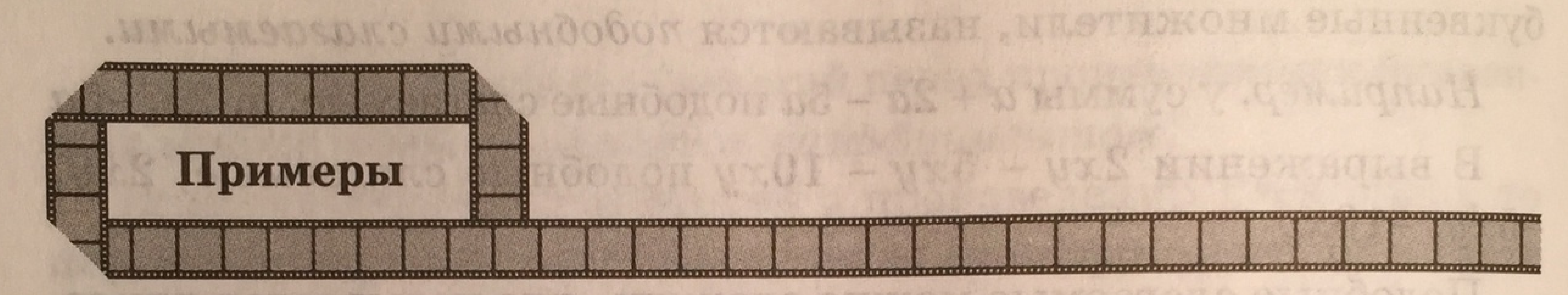
Например:

$$\underline{3xy} + \underline{xy} - \underline{\underline{ab}} + \underline{\underline{2ab}} = 4xy + ab \quad \begin{array}{|l} 3 + 1 = 4 \\ -1 + 2 = 1 \end{array}$$

④ Если коэффициенты двух подобных слагаемых — противоположные числа, то зачеркните эти два слагаемых (так как их сумма равна нулю: $-a + a = 0$).

Например: $-3a + b + 3a = b$

Внимание! Помните, что $a = 1 \cdot a$ и $-a = -1 \cdot a$.



1. Приведите подобные слагаемые в выражении $2x - a + x + 4a$.

Решение.

$2x - a + x + 4a = (2x + x) + (-a + 4a) = 3x + 3a$ | $2 + 1 = 3$; $-1 + 4 = 3$

Ответ: $3x + 3a$.

2. Решите уравнение $2x + 3x - 6x = -10$.

Решение.

$2x + 3x - 6x = -10$ | $2 + 3 - 6 = -1$

$-x = -10$ | $\cdot (-1)$

$x = 10$

Ответ: 10.

3. Упростите выражение $-18b + 3b - 14b - 8b$ и вычислите его значение при $b = -1$.

Решение.

$-18b + 3b - 14b - 8b = -37b$, $b = -1$, | $-18 + 3 - 14 - 8 = -37$

поэтому $-37b = -37 \cdot (-1) = 37$

Ответ: 37.

Проверь себя!

Упростите выражение $-7x + 5y - 13x - 8y$ и вычислите его значение при $x = 1{,}5$, $y = -2$.

Ответ: -24.

Попробуй не реши!

1. Вычислите коэффициент:

$$(-0{,}1)\cdot\frac{2}{5}\cdot b\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)\cdot c\cdot\frac{25}{64}:(-0{,}125)$$

Ответ: $-\frac{1}{64}$.

2. Решите уравнение $1{,}2\cdot(x-3) - 3{,}2\cdot(1-2x) = 2{,}4\cdot(1-x)$.

Ответ: $0{,}92$.

Попробуй-ка реши!

1. Упростите выражение $-5 - (1 - 3y) + 4\cdot(2y - 1) - (6y + 7)$ и вычислите его значение при $y = -0{,}7$.

Ответ: $-20{,}5$.

2. Вычислите коэффициент:

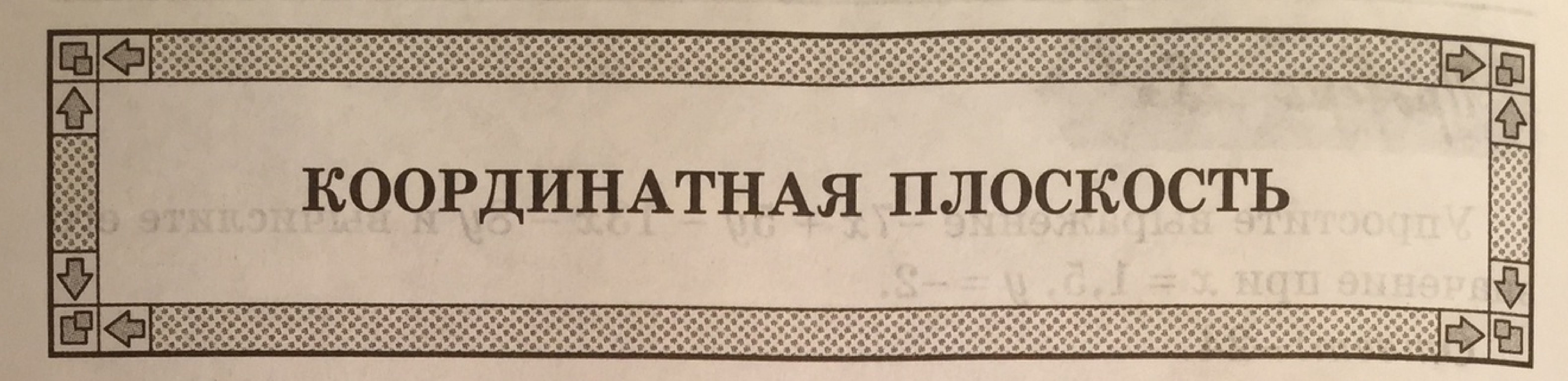
$$\frac{1}{9}a\cdot(-0{,}3)\cdot\left(-\frac{7}{12}\right)\cdot b\cdot\frac{36}{49}\cdot(-0{,}25)$$

Ответ: $-\frac{1}{280}$.

3. Приведите подобные слагаемые:

$$-5\frac{9}{32}ab - 6\frac{5}{48}ab - \left(-7\frac{15}{16}\right)ab - 8\frac{11}{24}ab + 10\frac{29}{32}ab$$

Ответ: $-ab$.



Плоскость, на которой заданы две взаимно перпендикулярные прямые Ox и Oy с выбранным на них направлением ($\rightarrow$; $\uparrow$), единичным отрезком и началом отсчета (в точке пересечения прямых) называется *координатной плоскостью*.

Ось Ox называется *осью абсцисс* (разделяющая).

Ось Oy называется *осью ординат* (упорядоченная) (рис. 1)

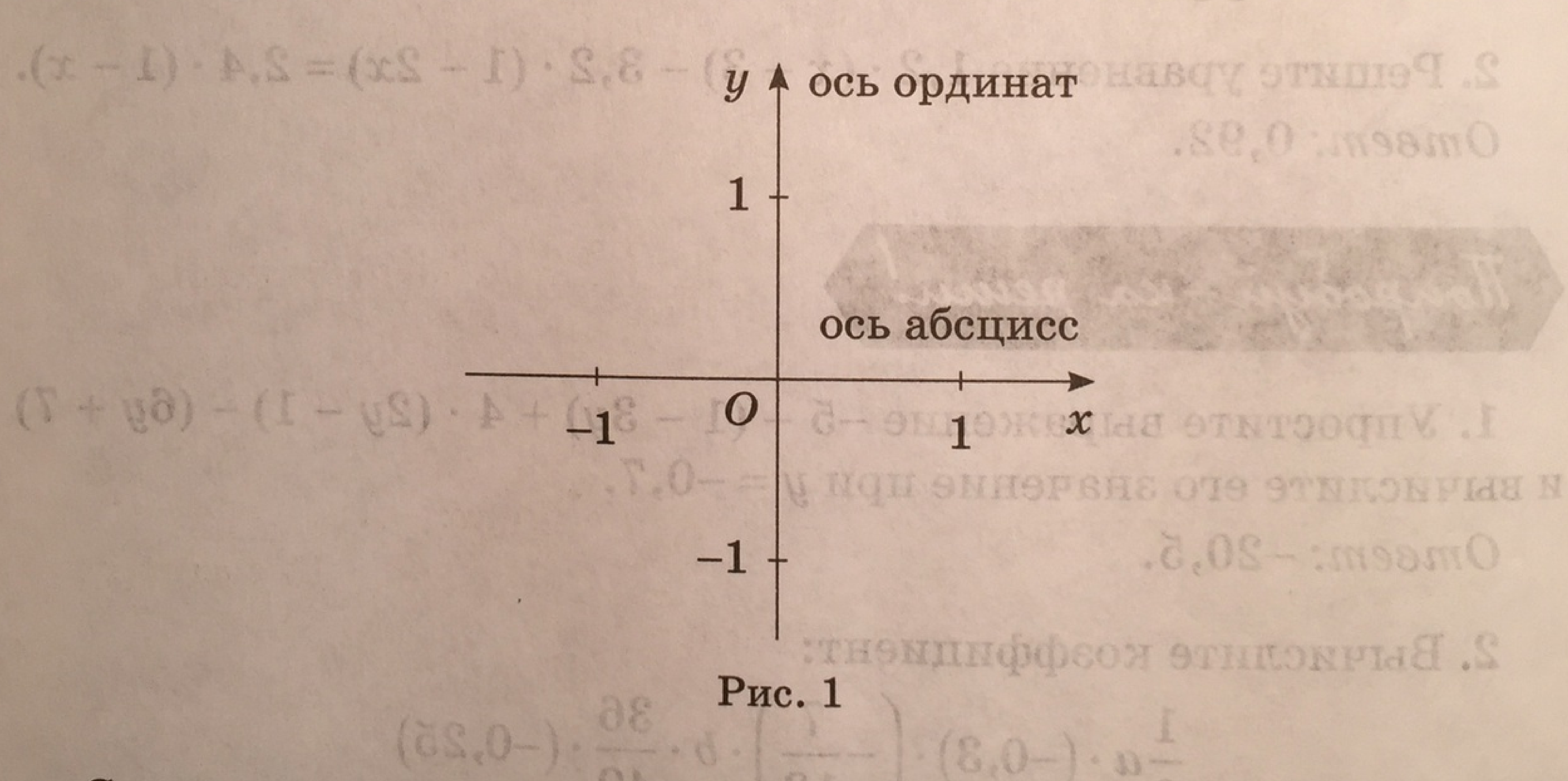


Рис. 1

Стрелка на осях указывает положительные направления от нуля.

Абсциссой точки называется число, равное длине отрезка оси Ox, взятое со знаком «плюс» (+), если отрезок справа от нуля, и со знаком «минус» (–), если отрезок слева от нуля.

Ординатой точки называется число, равное длине отрезка оси Oy, взятое со знаком «плюс» (+), если отрезок отложен

вверх от нуля, и со знаком «минус» (–), если отрезок отложен вниз от нуля.

Значения абсциссы (x) и ординаты (y) точки называются *координатами точки*. Их записывают рядом с названием точки, причем на первом месте всегда пишется x, а на втором месте y: $A(x; y)$.

Например: $A(3; 4)$, $B(0; 5)$, $C(-2; 8)$ → значения абсцисс: $x = 3, 0, -2$; значения ординат: $y = 4, 5, 8$

Начало координат — точка $O(0; 0)$ — имеет абсциссу $x = 0$ и ординату $y = 0$.

Знаки координат по четвертям (рис. 2)

II четверть — $B(-x; +y)$

I четверть — $A(+x; +y)$

III четверть — $C(-x; -y)$

IV четверть — $D(+x; -y)$

ось абсцисс, ось ординат

Рис. 2

Замечание. Если на плоскости задана одна координатная прямая Ox, то точка имеет только одну координату $A(-2)$, $B(3)$ (рис. 3).

Рис. 3

Если задана координатная плоскость (Oxy), то каждая точка плоскости имеет две координаты (числа), так же как и в том случае, если точка лежит на оси Ox или Oy.

Например: точки $K(3; 0)$, $P(-4; 0)$, $M(5; 0)$ лежат на оси Ox. Все точки с координатами $(x; 0)$ лежат на оси Ox; они имеют ординату $y = 0$ — это общее свойство точек оси Ox.

Точки $C(0; -1)$, $D(0; 3)$, $E(0; -4)$ лежат на оси Oy. Все точки с координатами $(0; y)$ лежат на оси Oy; они имеют абсциссу $x = 0$ — это общее свойство точек оси Oy.

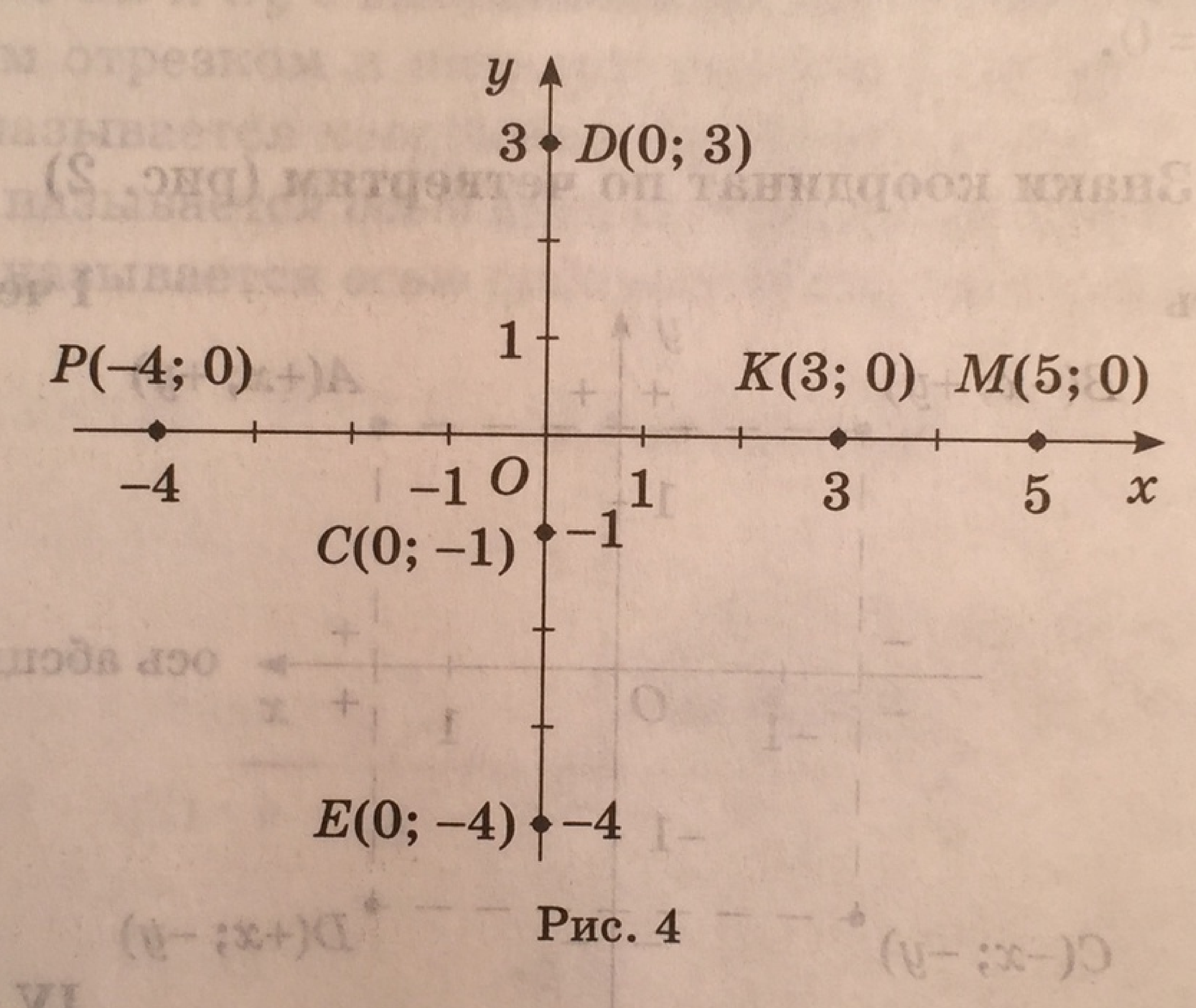


Рис. 4

Запомните! Каждая пара чисел $(x; y)$ определяет только одну точку на координатной плоскости, и каждой точке координатной плоскости соответствует единственная пара чисел $(x; y)$.

Алгоритм 96 Построение точки по ее координатам

① Если точка лежит на оси Ox, то ее координатами будет пара чисел $(x_0; 0)$. Поэтому отложите на оси Ox значение x_0, поставьте точку и назовите ее (рис. 5).

Например, построить точку A, если даны ее координаты: $x_0 = 4$, $y_0 = 0$. Отложите вправо от нуля на оси Ox 4 единицы и поставьте точку A.

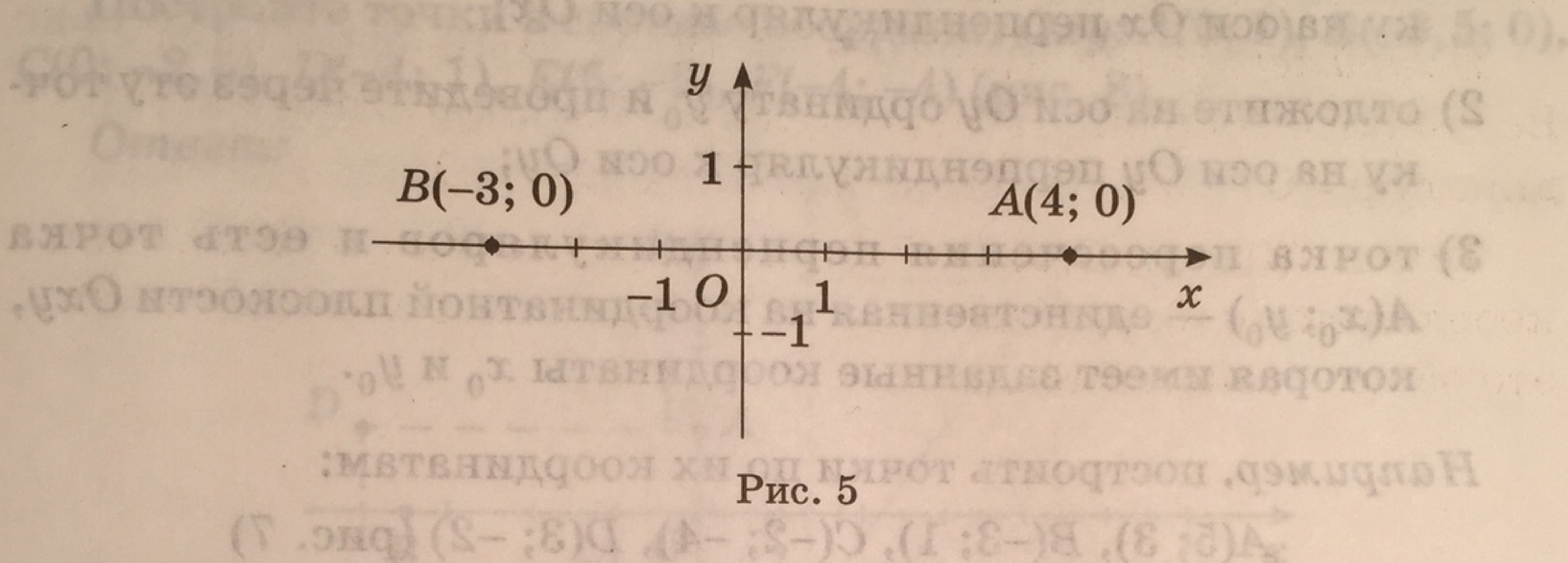


Рис. 5

Точка B имеет координаты: $x_0 = -3$, $y_0 = 0$. Отложите 3 единицы влево от нуля на оси Ox и поставьте точку B (рис. 5).

② Если точка лежит на оси Oy, то ее координатами будет пара чисел $(0; y_0)$. Поэтому отложите на оси Oy значение y_0, поставьте точку и назовите ее (рис. 6).

Например, построить точки C и D, если даны их координаты: $C(0; 2)$, $D(0; -3)$

Построение.

Отложите на оси Oy вверх от нуля 2 единицы и поставьте точку C. Отложите на оси Oy вниз от нуля 3 единицы и поставьте точку D (рис. 6).

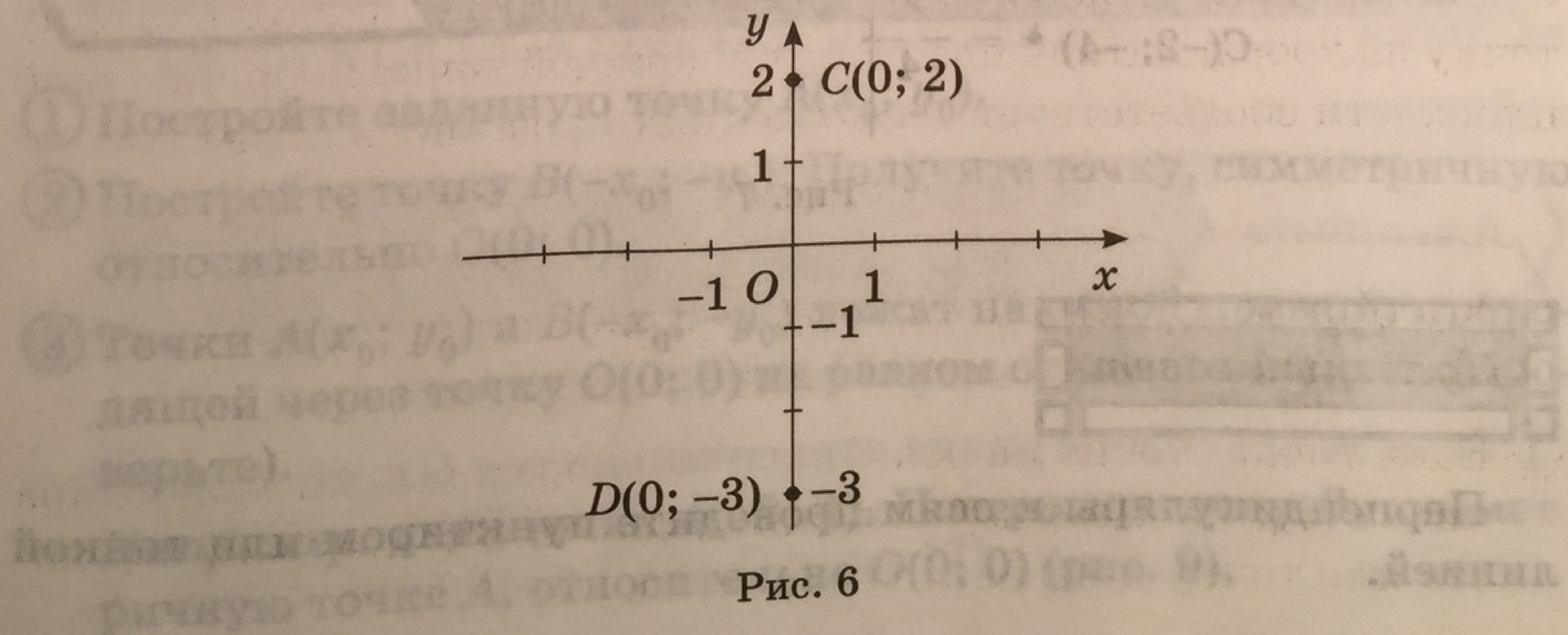


Рис. 6

③ Если точка $A(x_0; y_0)$ не лежит на осях Ox и Oy, то:

1) отложите на оси Ox абсциссу x_0 и проведите через эту точку на оси Ox перпендикуляр к оси Ox;
2) отложите на оси Oy ординату y_0 и проведите через эту точку на оси Oy перпендикуляр к оси Oy;
3) точка пересечения перпендикуляров и есть точка $A(x_0; y_0)$ — единственная на координатной плоскости Oxy, которая имеет заданные координаты x_0 и y_0.

Например, построить точки по их координатам:

$A(5; 3)$, $B(-3; 1)$, $C(-2; -4)$, $D(3; -2)$ (рис. 7)

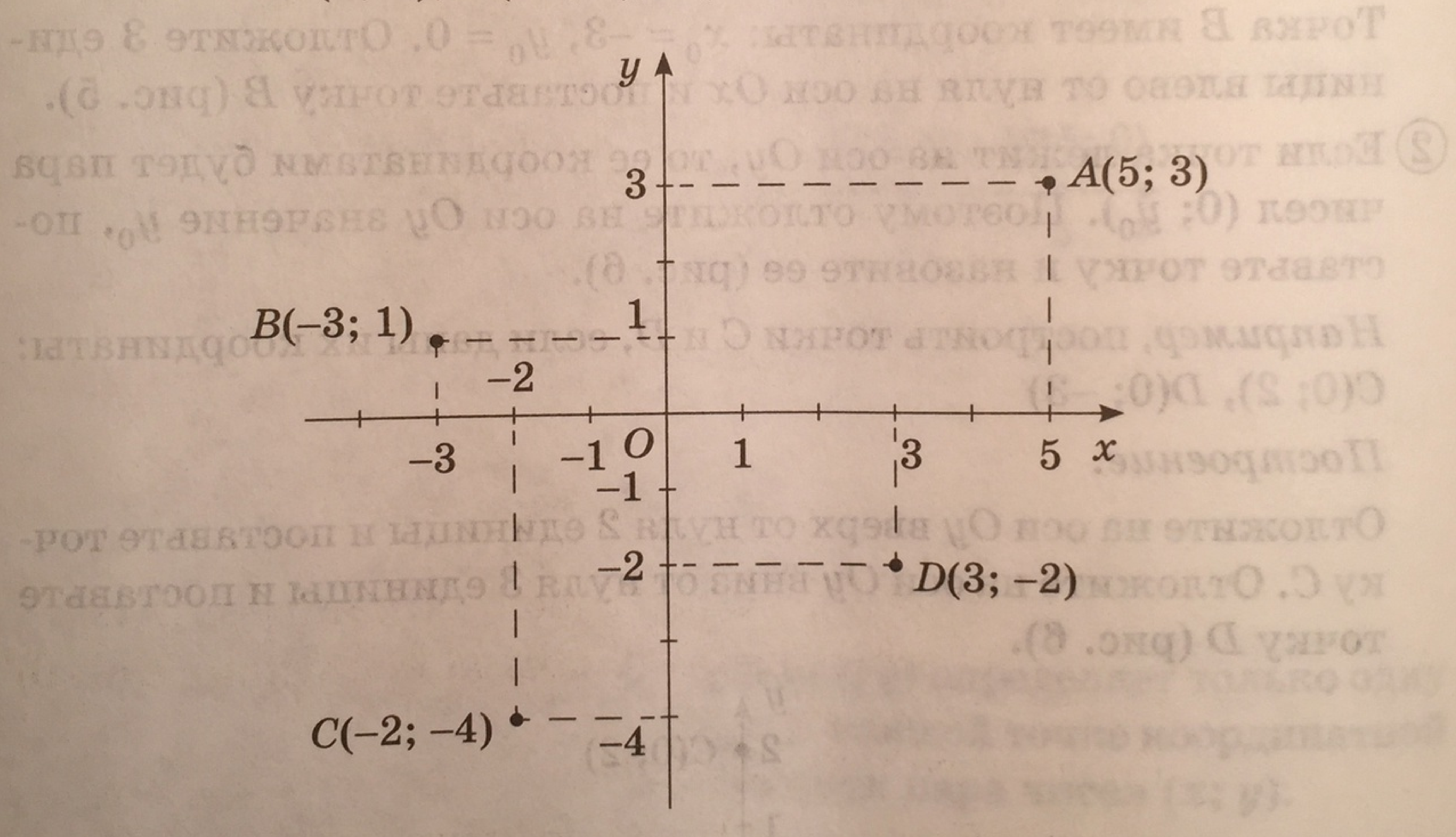


Рис. 7

Полезный совет

Перпендикуляры к осям проводите пунктиром или тонкой линией.

Проверь себя!

Постройте точки в системе координат Oxy: $A(0; 1)$, $B(-3,5; 0)$, $C(0; -2,5)$, $D(-4; 1)$, $E(6; -2)$, $F(-4; -4)$ (рис. 8).

Ответ:

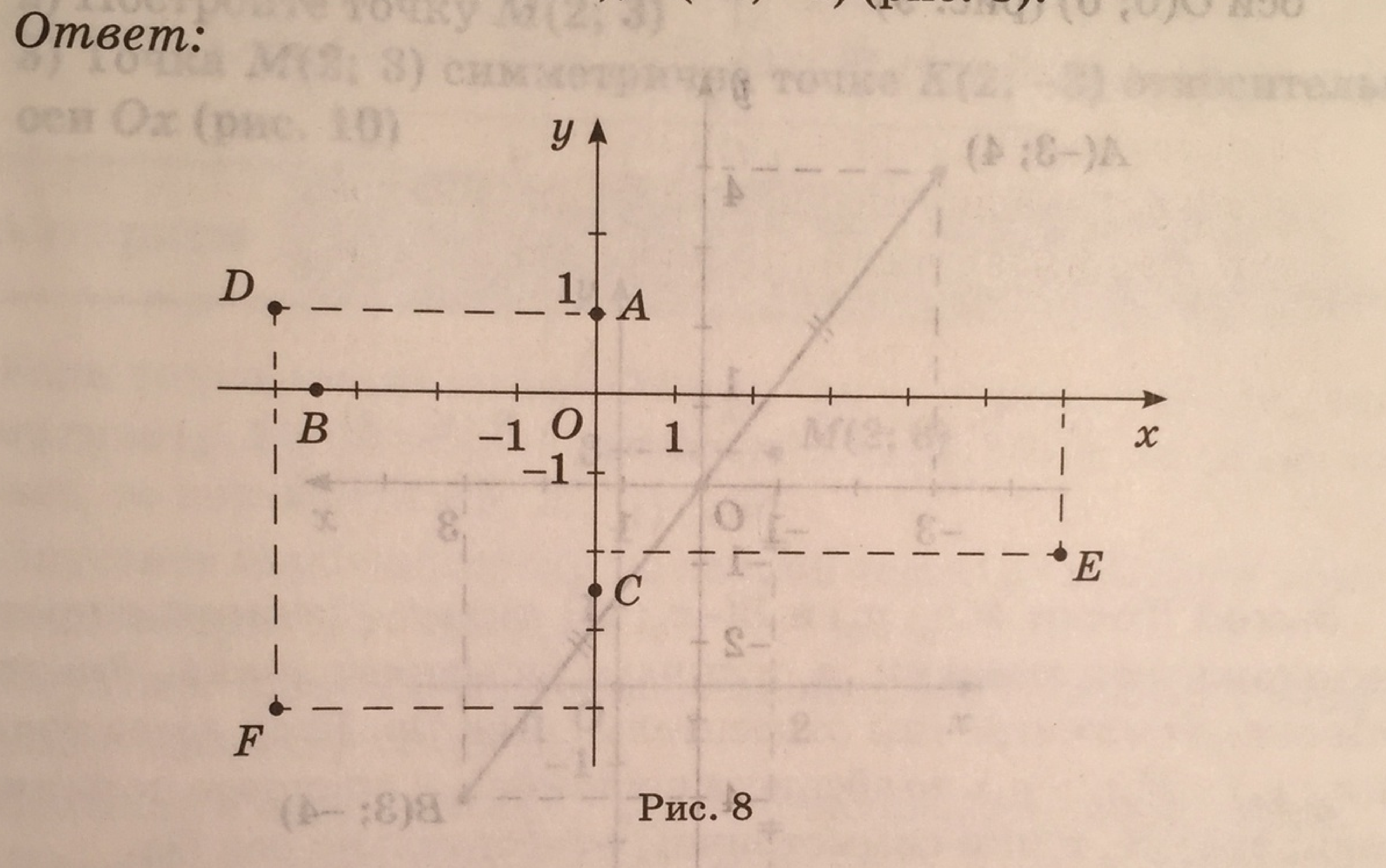


Рис. 8

Алгоритм 97 Построение точек, симметричных относительно начала координат $O(0; 0)$

① Постройте заданную точку $A(x_0; y_0)$.

② Постройте точку $B(-x_0; -y_0)$. Получите точку, симметричную относительно $O(0; 0)$.

③ Точки $A(x_0; y_0)$ и $B(-x_0; -y_0)$ лежат на одной прямой, проходящей через точку $O(0; 0)$ на равном от нее расстоянии (проверьте).

Например: дана точка $A(-3; 4)$. Построить точку B, симметричную точке A, относительно $O(0; 0)$ (рис. 9).

Решение.

1. Постройте точку $A(-3; 4)$
2. Постройте точку $B(3; -4)$
3. Точка $B(3; -4)$ симметрична точке $A(-3; 4)$ относительно оси $O(0; 0)$ (рис. 9)

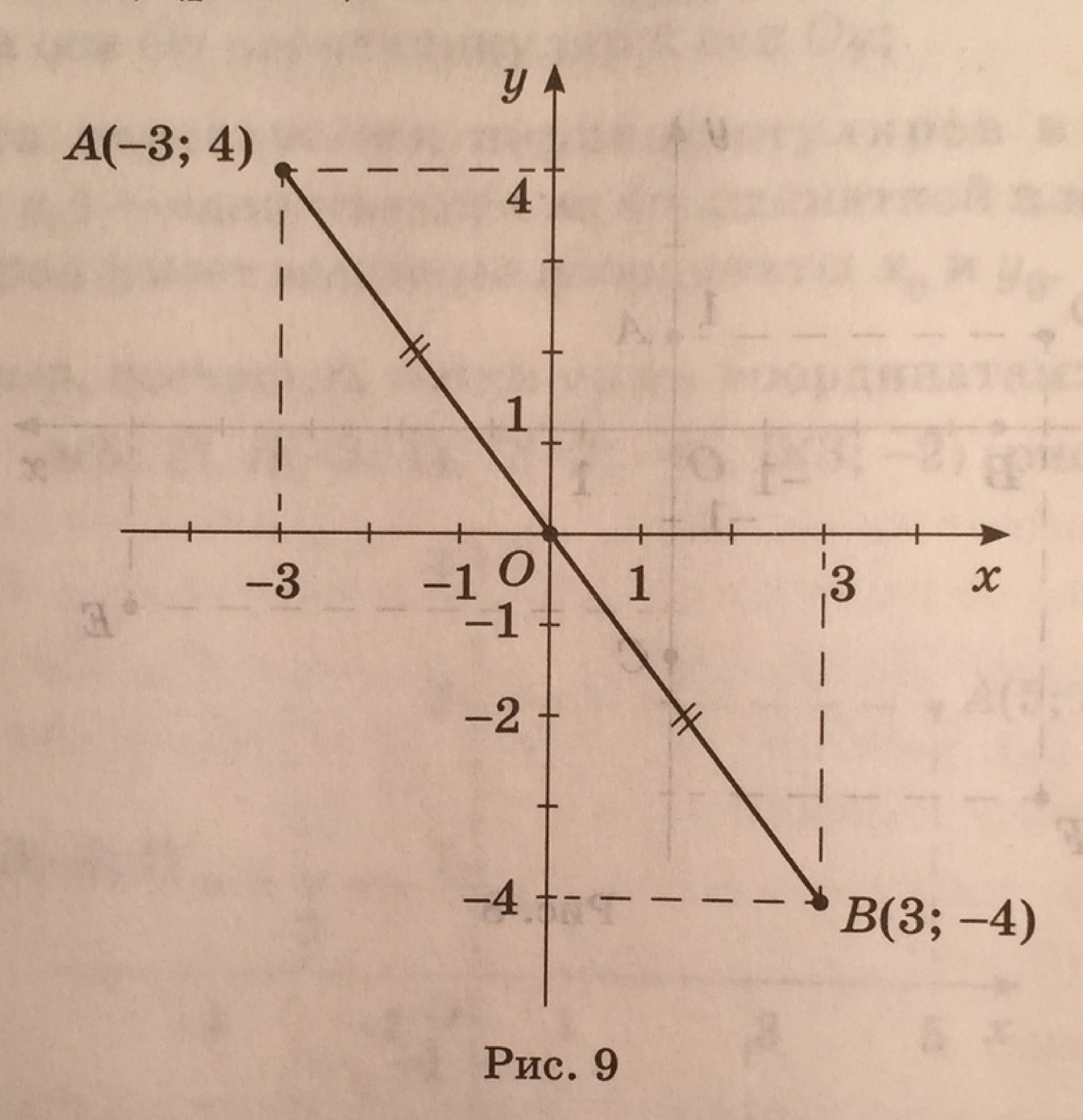


Рис. 9

Вывод. Чтобы построить точку, симметричную данной, относительно точки $O(0; 0)$, надо построить точку с координатами, взятыми с противоположными знаками: $A(x_0; y_0)$ и $B(-x_0; -y_0)$.

Алгоритм 98 Построение точек, симметричных относительно осей Ox и Oy

① Постройте данную точку в системе координат Oxy.

② Если точка симметрична относительно оси Ox, то поменяйте знак только у ординаты, а абсциссу точки оставьте без изменения.

Например: построить точку, симметричную точке $K(2; -3)$ относительно оси Ox

Решение.

1) Постройте точку $K(2; -3)$
2) Постройте точку $M(2; 3)$
3) Точка $M(2; 3)$ симметрична точке $K(2; -3)$ относительно оси Ox (рис. 10)

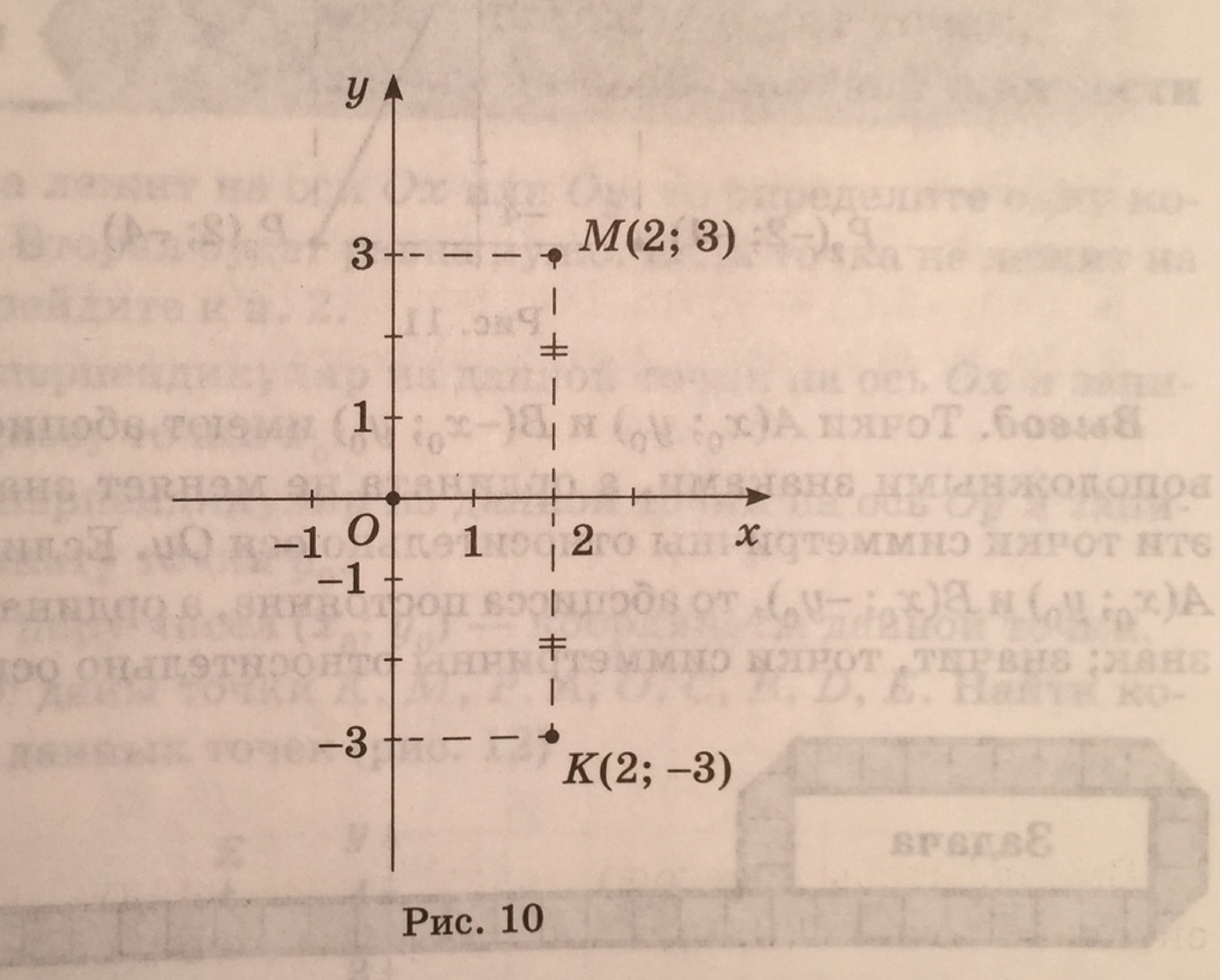


Рис. 10

③ Если точка симметрична относительно оси Oy, то поменяйте знак у абсциссы данной точки $A(x_0; y_0)$, а ординату оставьте прежней. И постройте точку $B(-x_0; y_0)$.

Например: построить точку, симметричную точке $P(-2; 4)$ относительно оси Oy

Решение.

1. Постройте точку $P(-2; 4)$
2. Постройте точку $P_1(2; 4)$ (рис. 11)

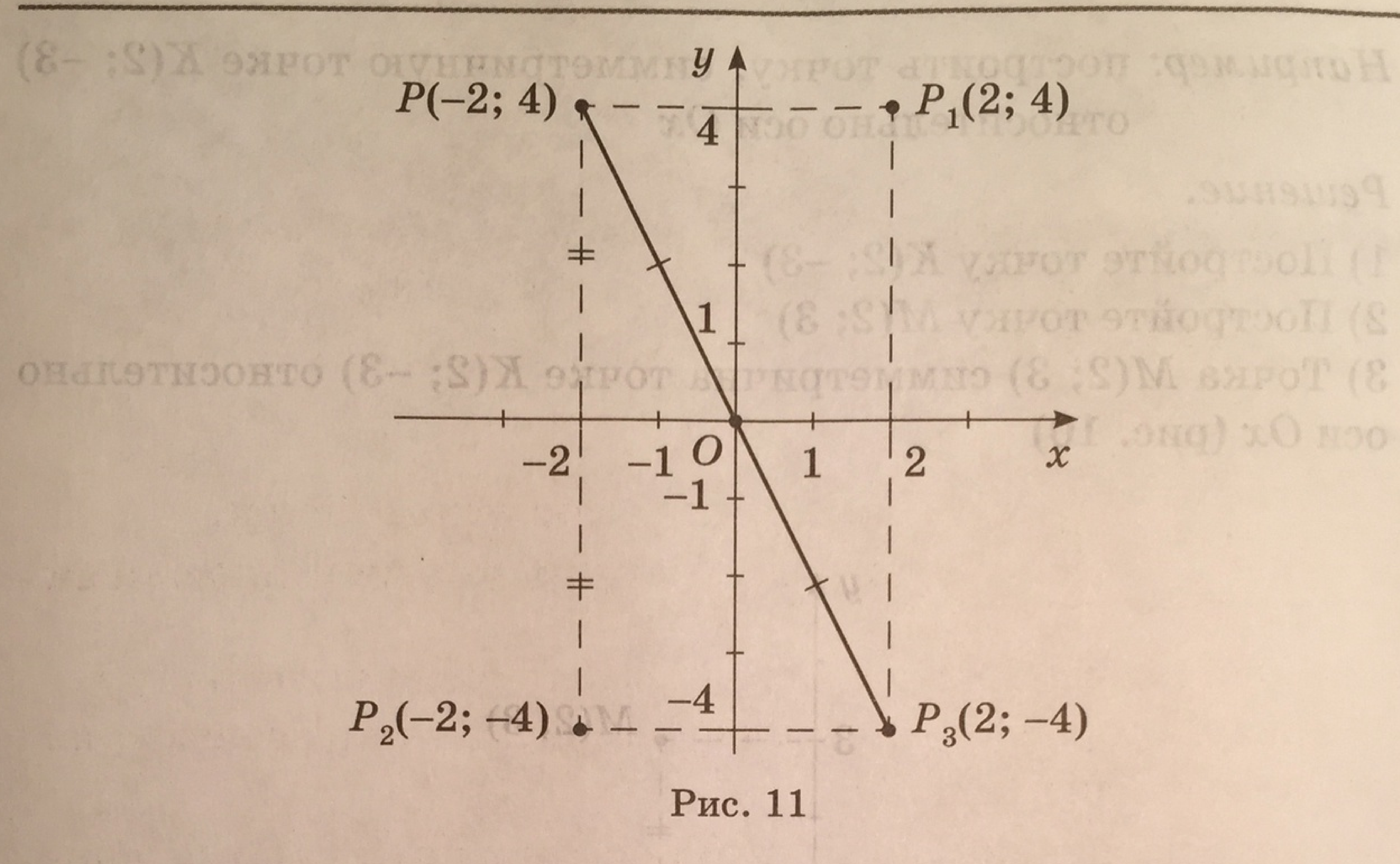
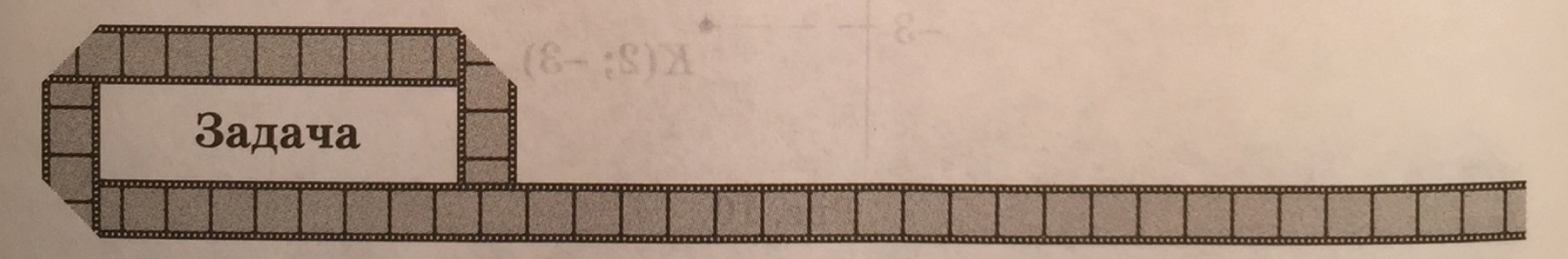


Рис. 11

Вывод. Точки $A(x_0; y_0)$ и $B(-x_0; y_0)$ имеют абсциссы с противоположными знаками, а ордината не меняет знака. Значит, эти точки симметричны относительно оси Oy. Если даны точки $A(x_0; y_0)$ и $B(x_0; -y_0)$, то абсцисса постоянна, а ордината поменяла знак; значит, точки симметричны относительно оси Ox.



Постройте точки, симметричные точке $P(-2; 4)$ относительно оси Ox и относительно точки $O(0; 0)$.

Построение.

1). Точка $P_2(-2; -4)$ симметрична точке $P(-2; 4)$ относительно оси Ox	$P(x_0; y_0)$ и $P_2(x_0; -y_0)$ симметричны относительно оси Ox
2). Точка $P_3(2; -4)$ симметрична точке $P(-2; 4)$ относительно точки $O(0; 0)$ (рис. 11)	$P(x_0; y_0)$ и $P_3(-x_0; -y_0)$ симметричны относительно $O(0; 0)$

Проверь себя!

Найдите координаты точек, симметричных точке $M(3; -4)$ относительно: 1) оси Ox; 2) оси Oy; 3) точки $O(0; 0)$.

Ответ: 1) $M_1(3; 4)$; 2) $M_2(-3; -4)$; 3) $M_3(-3; 4)$.

Алгоритм 99 Нахождение координат точек, заданных на координатной плоскости

① Если точка лежит на оси Ox или Oy, то определите одну координату. Вторая будет равна нулю. Если точка не лежит на оси, то перейдите к п. 2.

② Опустите перпендикуляр из данной точки на ось Ox и запишите абсциссу точки x_0.

③ Опустите перпендикуляр из данной точки на ось Oy и запишите ординату точки y_0.

④ Запишите пару чисел $(x_0; y_0)$ — координаты данной точки.

Например: даны точки K, M, P, A, O, C, B, D, E. Найти координаты данных точек (рис. 12)

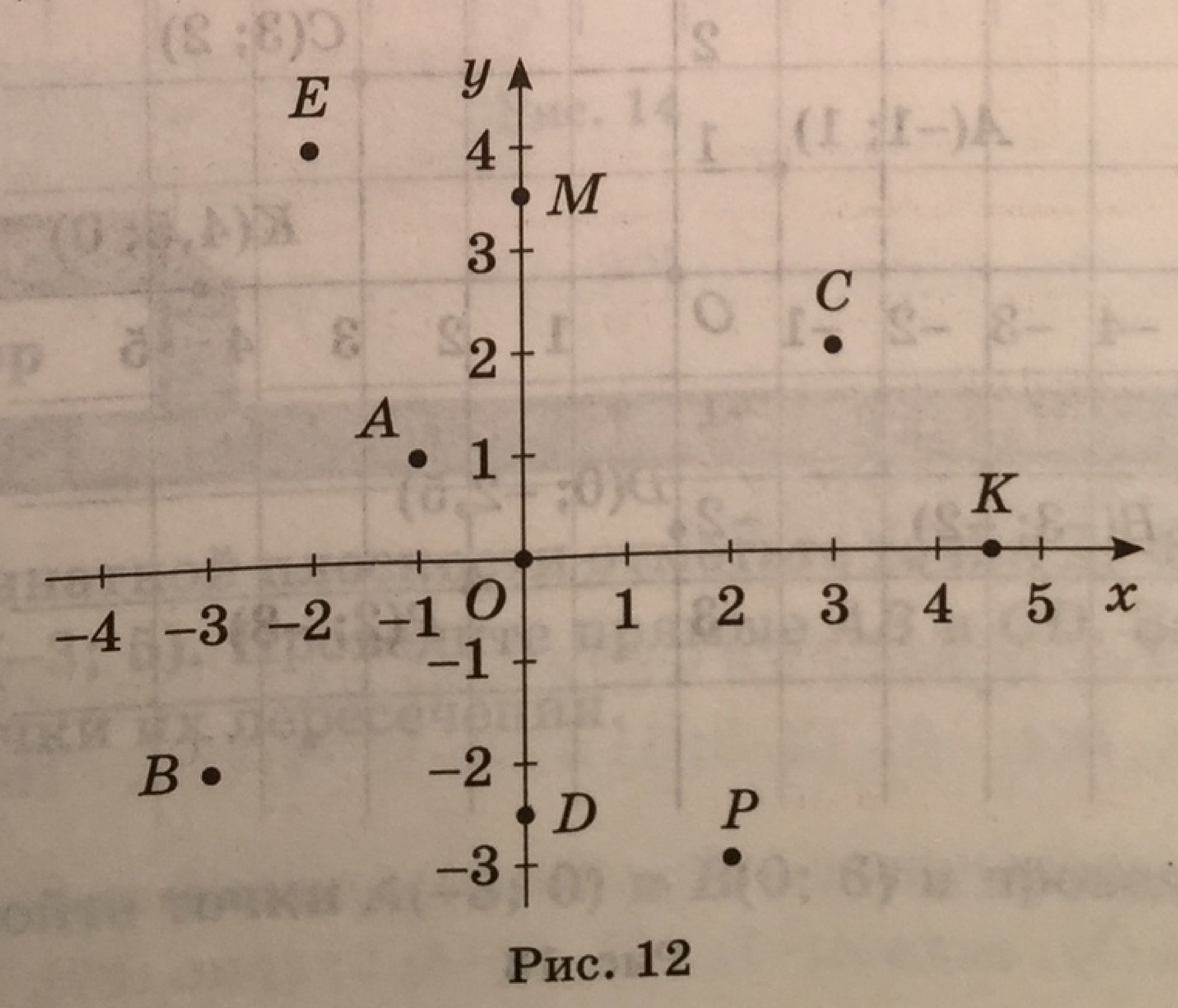


Рис. 12

Замечание. Желательно иметь миллиметровую бумагу или бумагу в клеточку с заданным единичным отрезком на осях.

Решение (рис. 13)

1. $K(4{,}5;\ 0)$ — точка K на оси Ox: $K(x_0;\ 0)$
2. $M(0;\ 3{,}5)$ — точка M на оси Oy: $M(0;\ y_0)$
3. $P(2;\ -3)$ — точка P в IV четверти: $P(x_0;\ -y_0)$. Проведите к осям Ox и Oy перпендикуляры
4. $A(-1;\ 1)$ — точка A во II четверти: $A(-x_0;\ y_0)$. Проведите к осям Ox и Oy перпендикуляры
5. $O(0;\ 0)$ — начало координат
6. $C(3;\ 2)$ — точка C в I четверти: $C(x_0;\ y_0)$
7. $B(-3;\ -2)$ — точка B в III четверти: $B(-x_0;\ -y_0)$
8. $D(0;\ -2{,}5)$ — точка D на оси Oy: $D(0;\ y_0)$
9. $E(-2;\ 4)$ — точка E во II четверти: $E(-x_0;\ y_0)$

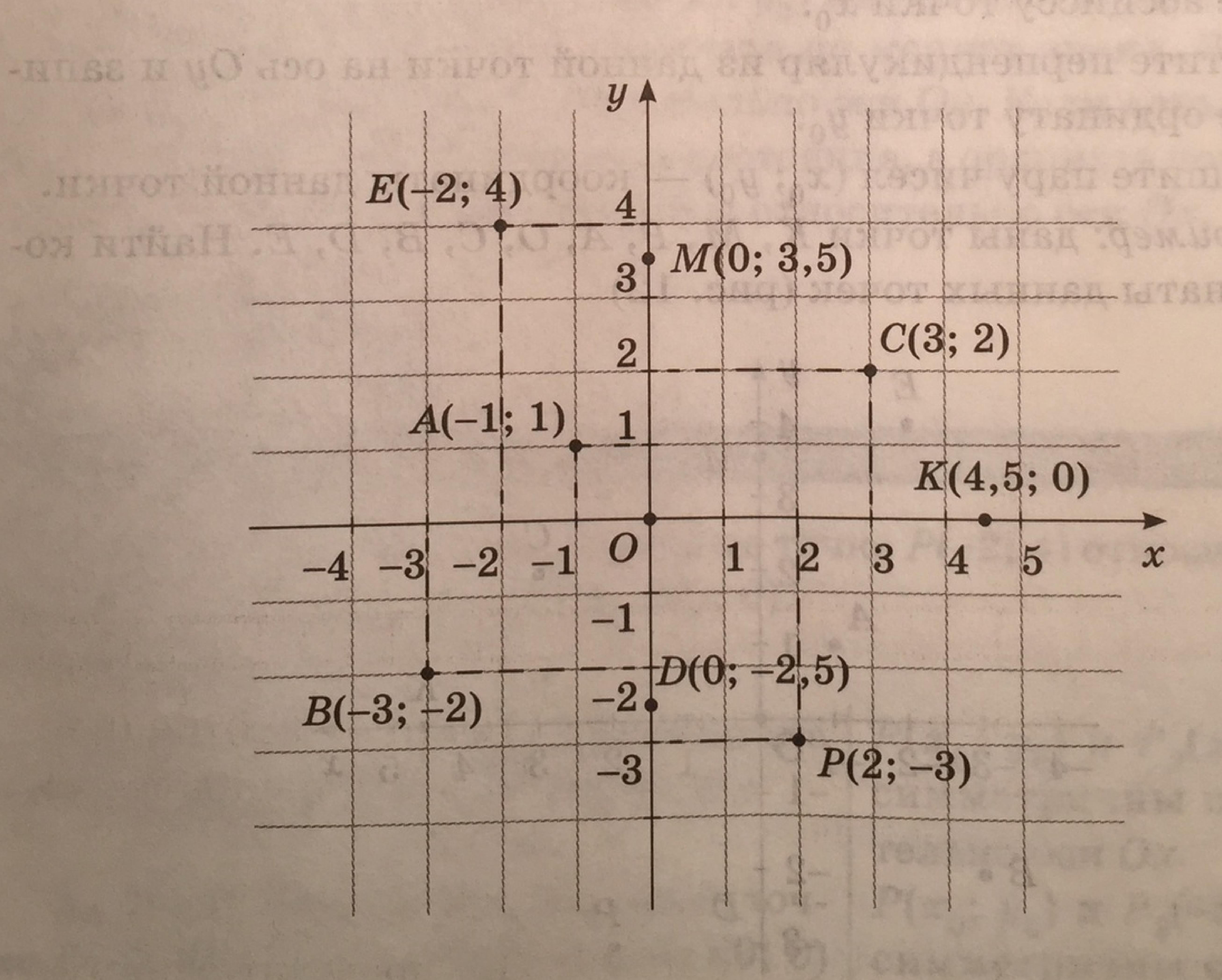


Рис. 13

Проверь себя!

Найдите координаты заданных точек на координатной плоскости (рис. 14).

Ответ: $A(3; 0)$, $B(-6; 0)$, $C(0; 2)$, $D(0; -3{,}5)$, $E(5; 2)$, $F(4{,}5; -3)$, $K(-4; -2{,}5)$, $L(-5; 1)$, $P(-3; 3)$.

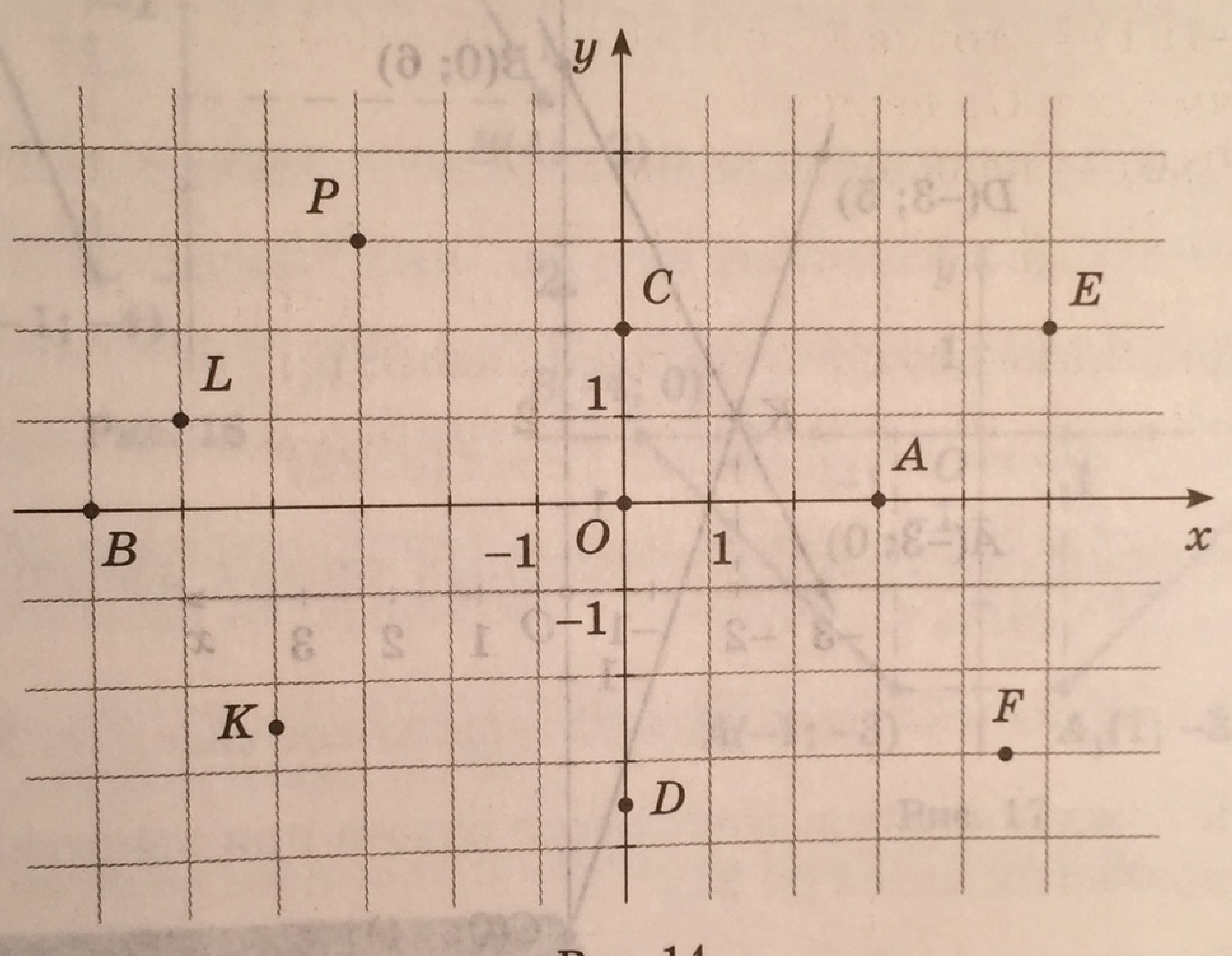
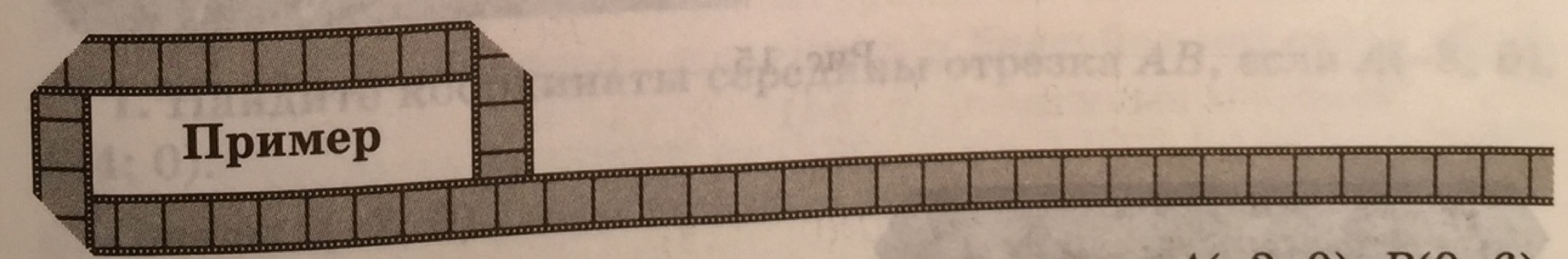


Рис. 14



На координатной плоскости отметьте точки $A(-3; 0)$, $B(0; 6)$, $C(0; -4)$ и $D(-3; 5)$. Проведите прямые AB и CD. Запишите координаты точки их пересечения.

Решение.

1). Постройте точки $A(-3; 0)$ и $B(0; 6)$ и проведите прямую AB

2). Постройте точки $C(0; -4)$ и $D(-3; 5)$ и проведите прямую CD

3). Опустите перпендикуляры из точки K на оси, получите: $x_0 = -2$, $y_0 = 2$ (рис. 15)

Ответ: $K(-2; 2)$ — точка пересечения прямых AB и CD.

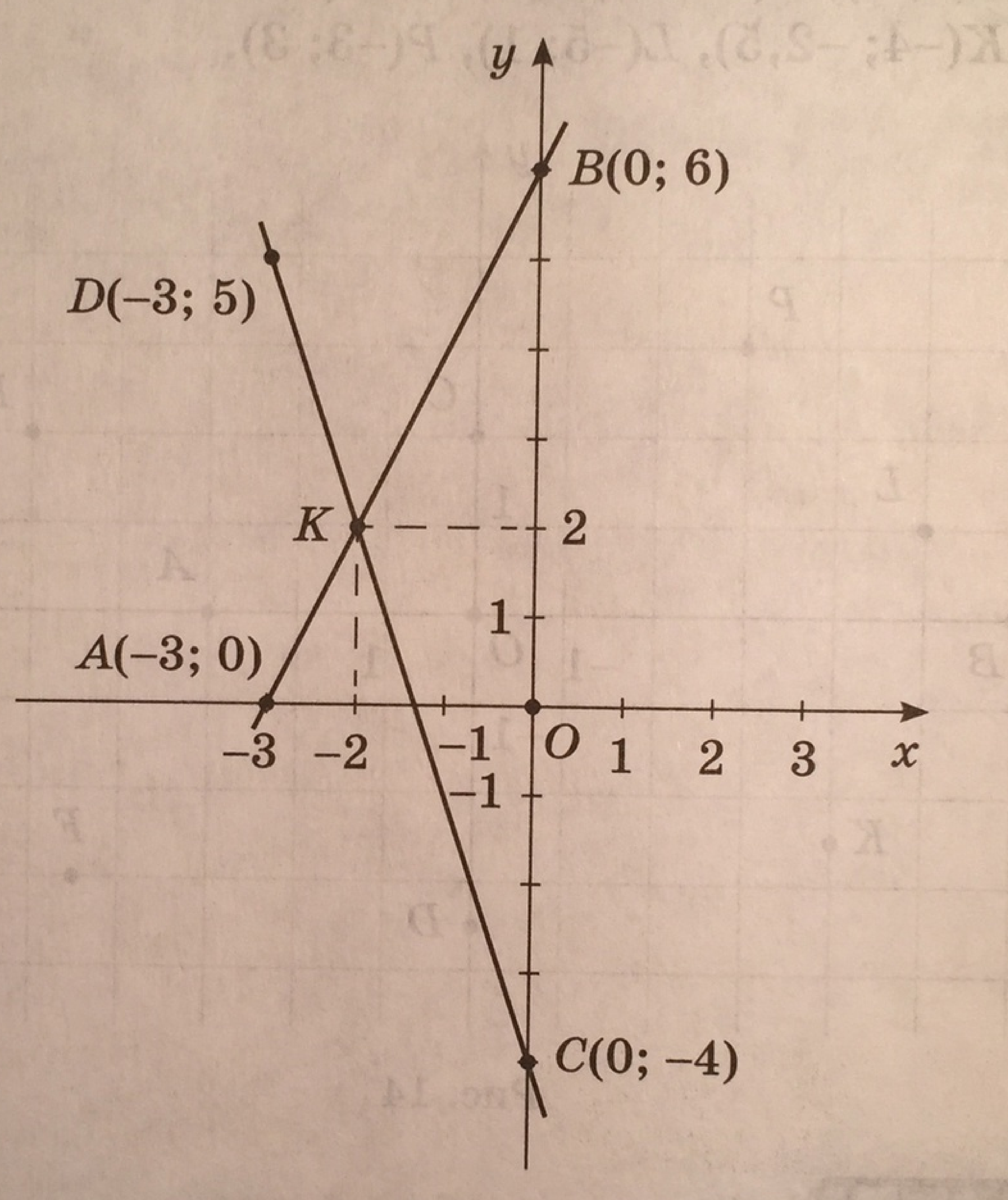


Рис. 15

Попробуй не реши!

1. Постройте отрезки AB и CD, если их концы имеют координаты: $A(1; 3)$, $B(4; -2)$, $C(-3; 1)$ и $D(-1; -4)$ (рис. 16).

2. Постройте отрезок A_1B_1, симметричный отрезку AB относительно оси Oy, если $A(-1; -3)$, $B(-4; 0)$ (рис. 17).

Ответ:

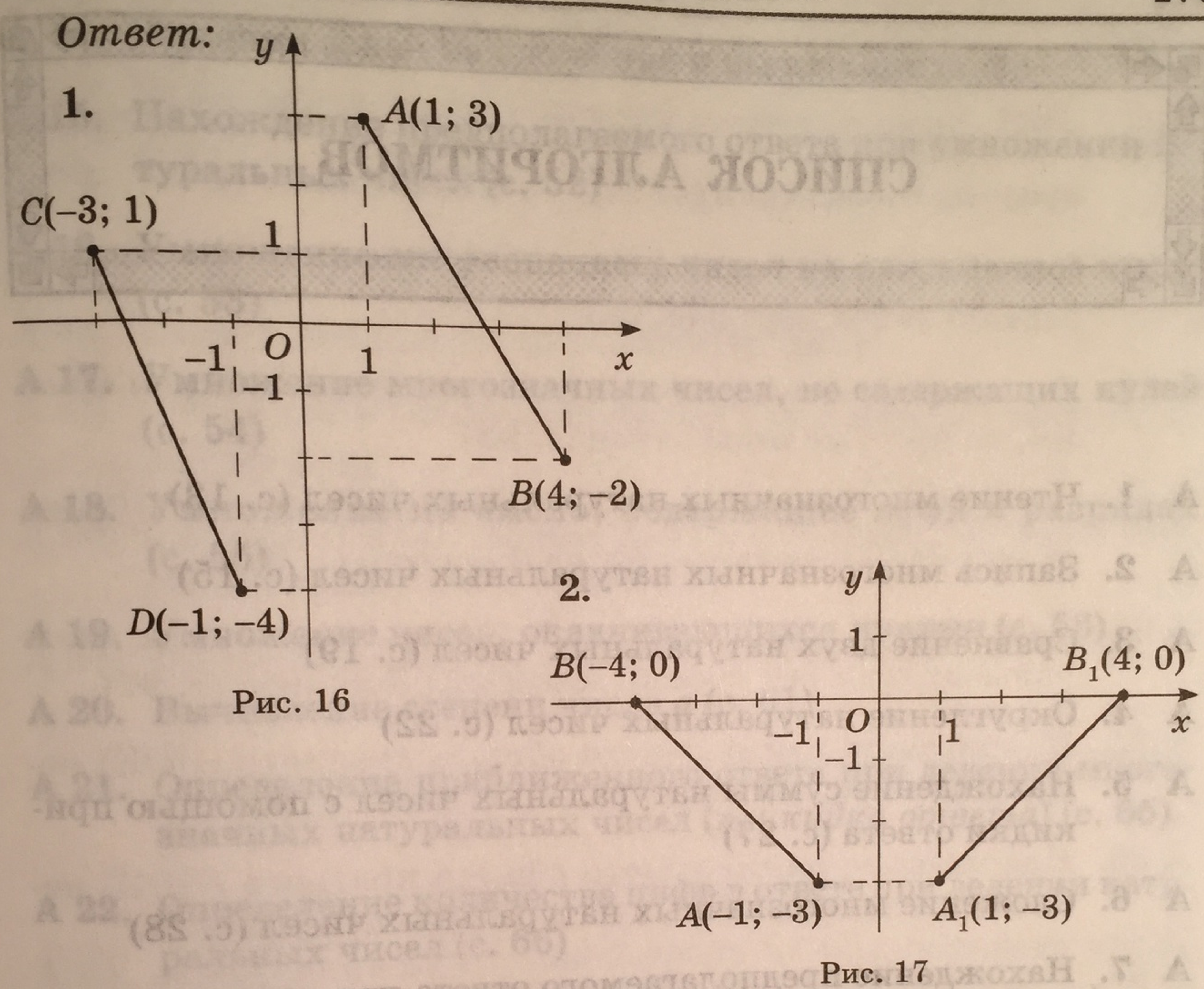


Рис. 16

Рис. 17

Попробуй-ка реши!

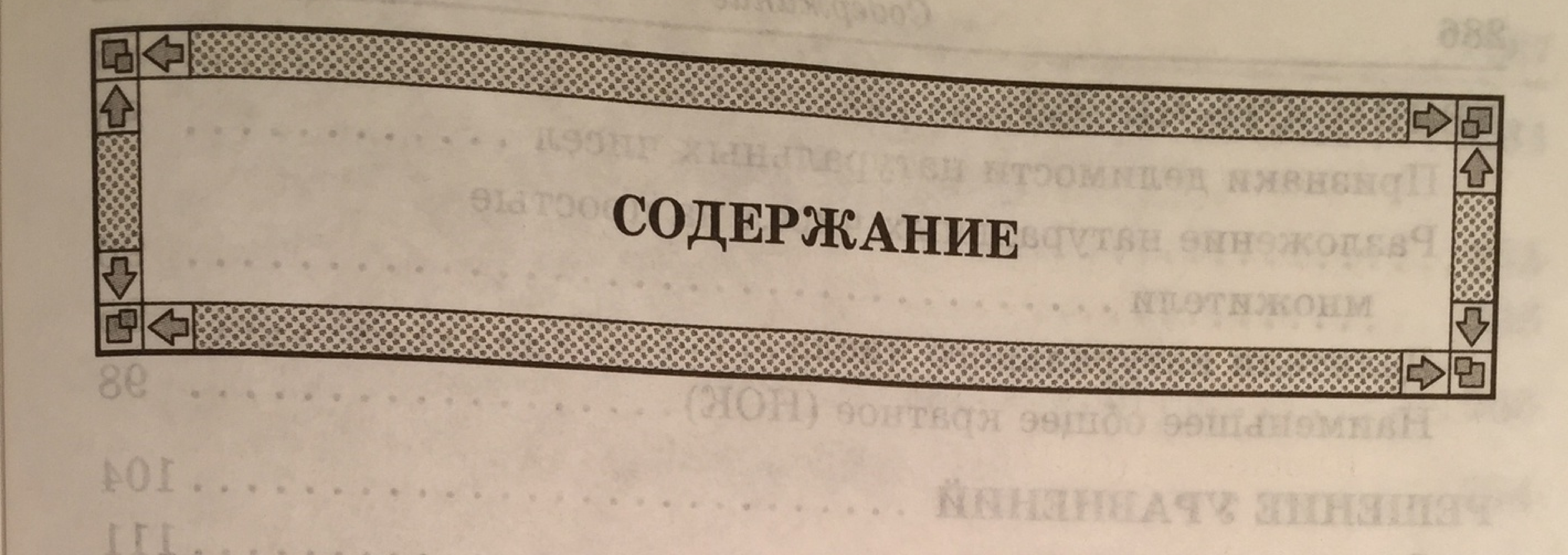
1. Найдите координаты середины отрезка *AB*, если *A*(–8; 0), *B*(4; 0).

Ответ: (–2; 0).

2. Вычислите площадь прямоугольника, вершины которого заданы точками: *A*(3; 6), *B*(–2; 6), *C*(–2; –4), *D*(3; –4).

Ответ: 50 кв. единиц.

СПИСОК АЛГОРИТМОВ



СОДЕРЖАНИЕ

Издательский Дом «Литера»
приглашает к сотрудничеству авторов
Телефоны редакции: (812) 560-8684, 325-4741
E-mail: publish@litera.spb.ru
http://www.litera.spb.ru

По вопросам реализации обращаться
в Санкт-Петербурге: (812) 441-3649, 441-3650
E-mail: sales@litera.spb.ru
в Москве: (495) 781-2053, 912-3128
E-mail: mail@litera.inc.ru

Михайлова Жанна Николаевна

Алгоритмы — ключ к решению задач
МАТЕМАТИКА
5—6 классы

Редактор *И. Жуковская*
12+
Обложка *В. Финогенов*
Корректор *И. Астрова*
Верстка *И. Хайрова*

Подписано в печать 20.07.15. Формат $70 \times 90^1/_{16}$. Печать офсетная.
Гарнитура Школьная. Усл. печ. л. 21,06. Тираж 3000 экз. Заказ № 5621.

ООО «Издательский Дом „Литера“»
Россия, 192131, Санкт-Петербург, Ивановская ул., 24 лит. А

Отпечатано в филиале
«Тверской полиграфический комбинат детской литературы»
ОАО «Издательство „Высшая школа“»

Россия, 170040, Тверь, проспект 50 лет Октября, д. 46
Тел.: +7(4822) 44-85-98. Факс: +7(4822) 44-61-51

книга-репетитор

Алгоритмы — ключ к решению задач

Михайлова Жанна Николаевна — учитель высшей категории, методист, Отличник народного просвещения. Является автором эффективной методики обучения математике через алгоритмизацию базового учебного материала и работу с формулами.

Математика. **5–6** классы

Алгебра. **7–9** классы

Алгебра и элементарные функции. **10–11** классы

Начала математического анализа.
Геометрия. Тригонометрия. **10–11** класс

Учебные пособия дают возможность освоить школьную программу каждому ученику самостоятельно, без репетитора!

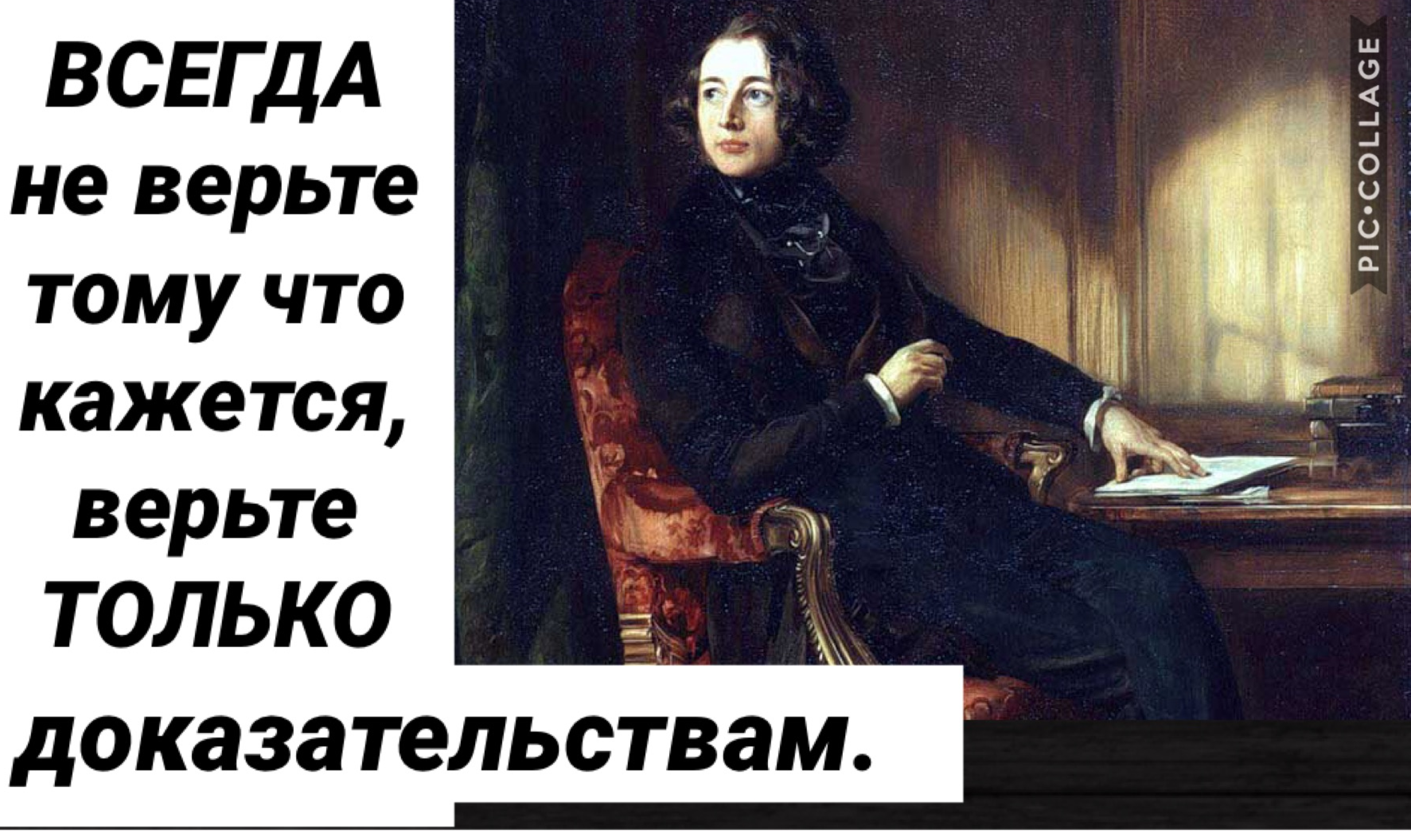
www.litera.spb.ru

ISBN 978-5-407-00480-6

5–6
классы

Алгоритмы — ключ к решению задач

Математика



Чарльз Диккенс. «Большие надежды» 1861 г.